$p = \pm 500$ (metros)	
$\pm x$	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$
4	0,0160
5	0,0250
6	0,0360
7	0,0490
8	0,0640
9	0,0810
10	0,1000
11	0,1210
12	0,1440
13	0,1690
14	0,1960
15	0,2250
16	0,2560
17	0,2890
18	0,3240
19	0,3610
20	0,4000
21	0,4410
22	0,4840
23	0,5290
24	0,5760
25	0,6250
26	0,6760
27	0,7290
28	0,7840
29	0,8410
30	0,9000
31	0,9610
32	1,0240
33	1,0890
34	1,1560
35	1,2250
36	1,2960
37	1,3690
38	1,4440
39	1,5210
40	1,6000
41	1,6810
42	1,7640
43	1,8490
44	1,9360
45	2,0250
46	2,1160
47	2,2090
48	2,3040
49	2,4010
50	2,5000
51	2,6010
52	2,7040
53	2,8090
54	2,9160
55	3,0250
56	3,1360

$p = \pm 500$ (metros)	
$\pm x$	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$
57	3,2490
58	3,3640
59	3,4810
60	3,6000

$p = \pm 550$ (metros)	
0	0,0000
1	0,0010
2	0,0036
3	0,0082
4	0,0145
5	0,0227
6	0,0327
7	0,0445
8	0,0582
9	0,0736
10	0,0910
11	0,1100
12	0,1310
13	0,1536
14	0,1781
15	0,2045
16	0,2327
17	0,2627
18	0,2945
19	0,3281
20	0,3636
21	0,4010
22	0,4400
23	0,4810
24	0,5236
25	0,5681
26	0,6145
27	0,6627
28	0,7127
29	0,7645
30	0,8181
31	0,8736
32	0,9310
33	e,9910
34	1,0510
35	1,1136
36	1,1781
37	1,2445
38	1,3127
39	1,3827
40	1,4545
41	1,5281
42	1,6036
43	1,6810

$p = \pm 550$ (metros)	
$\pm x$	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$
44	1,7600
45	1,8410
46	1,9236
47	2,0081
48	2,0945
49	2,1827
50	2,2727
51	2,3645
52	2,4581
53	2,5536
54	2,6510
55	2,7500
56	2,8510
57	2,9536
58	3,0581
59	3,1645
60	3,2727
61	3,3827
62	3,4945
63	3,6081
64	3,7236
65	3,8410
66	3,9600

$p = \pm 600$ (metros)	
0	0,0000
1	0,0008
2	0,0033
3	0,0075
4	0,0133
5	0,0208
6	0,0300
7	0,0408
8	0,0533
19	0,0674
10	0,0833
11	0,1008
12	0,1200
13	0,1408
14	0,1633
15	0,1875
16	0,2133
17	0,2408
18	0,2700
19	0,3008
20	0,3333
21	0,3674
22	0,4033
23	0,4408
24	0,4800
25	0,5208

$p = \pm 600$ (metros)	
$\pm x$	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$
26	0,5633
27	0,6075
28	0,6533
29	0,7008
30	0,7500
31	0,8008
32	0,8533
33	0,9075
34	0,9633
35	1,0208
36	1,0800
37	1,1408
38	1,2033
39	1,2674
40	1,3333
41	1,4008
42	1,4700
43	1,5408
44	1,6133
45	1,6875
46	1,7633
47	1,8408
48	1,9200
49	2,0008
50	2,0833
51	2,1675
52	2,2533
53	2,3408
54	2,4300
55	2,5208
56	2,6133
57	2,7075
58	2,8033
59	2,9008
60	3,0000
61	3,1008
62	3,2033
63	3,3075
64	3,4133
65	3,5208
66	3,6300
67	3,7408
68	3,8533
69	3,9674
70	4,0833
71	4,2008
72	4,3200

$p = \pm 650$ (metros)	
0	0,0000
1	0,0007

$p = \pm 650$ (metros)	
$\pm x$	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$
2	0,0031
3	0,0070
4	0,0123
5	0,0192
6	0,0276
7	0,0377
8	0,0492
9	0,0623
10	0,0770
11	0,0930
12	0,1107
13	0,1300
14	0,1507
15	0,1730
16	0,1970
17	0,2223
18	0,2492
19	0,2776
20	0,3076
21	0,3392
22	0,3723
23	0,4070
24	0,4430
25	0,4807
26	0,5200
27	0,5608
28	0,6031
29	0,6470
30	0,6923
31	0,7392
32	0,7877
33	0,8377
34	0,8892
35	0,9423
36	0,9970
37	1,0530
38	1,1107
39	1,1700
40	1,2307
41	1,2930
42	1,3570
43	1,4223
44	1,4892
45	1,5576
46	1,6276
47	1,6992
48	1,7723
49	1,8470
50	1,9230
51	2,0007
52	2,0800
53	2,1607
54	2,2430

$p = \pm 650$ (metros)	
$\pm x$	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$
55	2,3269
56	2,4123
57	2,4992
58	2,5876
59	2,6776
60	2,7692
61	2,8623
62	2,9570
63	3,0530
64	3,1507
65	3,2500
66	3,3507
67	3,4530
68	3,5570
69	3,6623
70	3,7692
71	3,8776
72	3,9876
73	4,0992
74	4,2123
75	4,3270
76	4,4430
77	4,5607
78	4,6800

$p = \pm 700$ (metros)	
0	0,0000
1	0,0007
2	0,0028
3	0,0064
4	0,0114
5	0,0178
6	0,0257
7	0,0350
8	0,0457
9	0,0578
10	0,0714
11	0,0864
12	0,1028
13	0,1207
14	0,1400
15	0,1607
16	0,1828
17	0,2064
18	0,2314
19	0,2578
20	0,2857
21	0,3150
22	0,3457

p = ± 700 (metros)		p = ± 700 (metros)		p = ± 750 (metros)		p = ± 800 (metros)		p = ± 800 (metros)		p = ± 850 (metros)	
± x	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$	± x	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$	± x	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$	± x	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$	± x	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$	± x	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$
23	0,3778	76	4,1257	38	0,9626	0	0,0000	53	1,7556	4	0,0094
24	0,4114	77	4,2350	39	1,0140	1	0,0006	54	1,8225	5	0,0147
25	0,4464	78	4,3457	40	1,0666	2	0,0025	55	1,8906	6	0,0211
26	0,4828	79	4,4578	41	1,1206	3	0,0056	56	1,9600	7	0,0288
27	0,5207	80	4,5714	42	1,1760	4	0,0100	57	2,0306	8	0,0376
28	0,5600	81	4,6864	43	1,2326	5	0,0156	58	2,1025	9	0,0476
29	0,6007	82	4,8028	44	1,2906	6	0,0225	59	2,1756	10	0,0588
30	0,6428	83	4,9207	45	1,3500	7	0,0306	60	2,2500	11	0,0711
31	0,6864	84	5,0400	46	1,4106	8	0,0400	61	2,3256	12	0,0847
32	0,7314			47	1,4726	9	0,0506	62	2,4025	13	0,0994
33	0,7778			48	1,5360	10	0,0625	63	2,4806	14	0,1152
34	0,8257	p = ± 750 (metros)		49	1,6006	11	0,0756	64	2,5600	15	0,1323
35	0,8750			50	1,6666	12	0,0900	65	2,6406	16	0,1505
36	0,9257			51	1,7340	13	0,1056	66	2,7225	17	0,1700
37	0,9778			52	1,8026	14	0,1225	67	2,8056	18	0,1906
38	1,0314	0	0,0000	53	1,8726	15	0,1406	68	2,8900	19	0,2123
39	1,0864	1	0,0006	54	2,9440	16	0,1600	69	2,9756	20	0,2352
40	1,1428	2	0,0026	55	2,0166	17	0,1806	70	3,0625	21	0,2593
41	1,2007	3	0,0060	56	2,0906	18	0,2025	71	3,1506	22	0,2847
42	1,2600	4	0,0106	57	2,1660	19	0,2256	72	3,2400	23	0,3111
43	1,3207	5	0,0166	58	2,2426	20	0,2500	73	3,3306	24	0,3388
44	1,3828	6	0,0240	59	2,3206	21	0,2756	74	3,4225	25	0,3676
45	1,4464	7	0,0326	60	2,4000	22	0,3025	75	3,5156	26	0,3967
46	1,5114	8	0,0426	61	2,4806	23	0,3306	76	3,6100	27	0,4288
47	1,5778	9	0,0540	62	2,5626	24	0,3600	77	3,7056	28	0,4611
48	1,6457	10	0,0666	63	2,6460	25	0,3906	78	3,8025	29	0,4947
49	1,7150	11	0,0806	64	2,7300	26	0,4225	79	3,9006	30	0,5294
50	1,7857	12	0,0960	65	2,8166	27	0,4556	80	4,0000	31	0,5652
51	1,8578	13	0,1126	66	2,9040	28	0,4900	81	4,1006	32	0,6023
52	1,9314	14	0,1306	67	2,9926	29	0,5256	82	4,2025	33	0,6406
53	2,0064	15	0,1500	68	3,0826	30	0,5625	83	4,3056	34	0,6800
54	2,0828	16	0,1706	69	3,1740	31	0,6006	84	4,4100	35	0,7205
55	2,1607	17	0,1926	70	3,2666	32	0,6400	85	4,5156	36	0,7623
56	2,2400	18	0,2160	71	3,3606	33	0,6806	86	4,6225	37	0,8053
57	2,3207	19	0,2406	72	3,4560	34	0,7225	87	4,7506	38	0,8494
58	2,4028	20	0,2666	73	3,5520	35	0,7656	88	4,8400	39	0,8947
59	2,4864	21	0,2940	74	3,6506	36	0,8100	89	4,9506	40	0,9411
60	2,5714	22	0,3226	75	3,7500	37	0,8556	90	5,0625	41	0,9888
61	2,6578	23	0,3526	76	3,8506	38	0,9025	91	5,1756	42	1,0376
62	2,7457	24	0,3840	77	3,9526	39	0,9506	92	5,2900	43	1,0876
63	2,8350	25	0,4166	78	4,0560	40	1,0000	93	5,4056	44	1,1388
64	2,9257	26	0,4506	79	4,1606	41	1,0506	94	5,2225	45	1,1911
65	3,0178	27	0,4860	80	4,2666	42	1,1025	95	5,6406	46	1,2447
66	3,1114	28	0,5226	81	4,3740	43	1,1556	96	5,7600	47	1,2994
67	3,2064	29	0,5606	82	4,4826	44	1,2100			48	1,3553
68	3,3028	30	0,6000	83	4,5926	45	1,2656	p = ± 850 (metros)		49	1,4123
69	3,4007	31	0,6406	84	4,7040	46	1,3225			50	1,4705
70	3,5000	32	0,6826	85	4,8166	47	1,3806			51	1,5300
71	3,6007	33	0,7260	86	4,9306	48	1,4400			52	1,5905
72	3,7028	34	0,7706	87	5,0460	49	1,5006	0	0,0000	53	1,6523
73	3,8064	35	0,8166	88	5,1626	50	1,5625	1	0,0006	54	1,7152
74	3,9114	36	0,8640	89	5,2806	51	1,6256	2	0,0023	55	1,7794
75	4,0178	37	0,9126	90	5,4000	52	1,6900	3	0,0053	56	1,8447

. . . Quando precisarem de aço

Onde quer que o aço seja usado, a marca REPUBLIC STEEL, é uma garantia de inexcedível qualidade e serviço

REPUBLIC STEEL CORPORATION

Cleveland, Ohio, E. U. A.

A REPUBLIC produz entre outros: Aços de liga, ao Carbono e Inoxidáveis; Aços acabados a frio; Chapas; Barras, Fôrmas; Lâminas; Canos; Tubagem; Fôlha de Flandres; Porcas; Cavilhas; Rebites; Pregos; Ferro Gusa; Arame para Cêrcas Agrícolas e Arame farpado; Fio; Produtos de Aço Pré-fabricados para a Indústria, a Agricultura e para o Lar

Representantes exclusivos:

F. NÓBREGA DE LIMA, LTDA.

Avenida 24 de Julho, 1, 2.º Dt.º — LISBOA

A-PESAR-DE TÔDAS AS DIFICULDADES

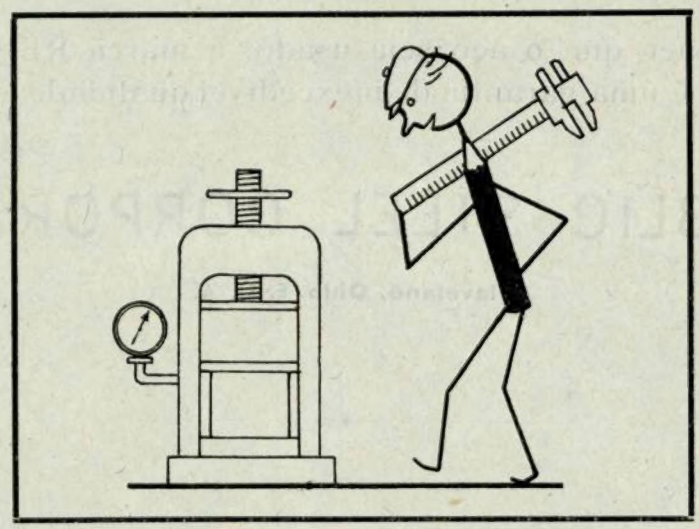
continuamos a bem servir no fornecimento de

APARELHOS DE PRECISÃO E ACESSÓRIOS

PAPELARIA E LIVRARIA TÉCNICAS

para

Engenheiros	Topógrafos	Escolas	Escritórios
Arquitectos	Desenhadores	Laboratórios	Repartições
Construtores	Estudantes	Fábricas	Observatórios



PIMENTEL & CASQUILHO, L.DA

R. Eugénio dos Santos, 75 / LISBOA / Telef. 24314-15

Quando a normalidade voltar, poderemos corresponder ainda melhor à preferência que temos conquistado nestes tempos difíceis

ATRAVÉS DE MUITOS ESFORÇOS

p = ± 850 (metros)		p = ± 900 (metros)		p = ± 900 (metros)		p = ± 961,53 (metros)		p = ± 961,53 (metros)		p = ± 961,53 (metros)	
± x	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$	± x	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$	± x	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$	± x	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$	± x	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$	± x	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$
57	1,9111	3	0,0050	56	1,7422	0	0,0000	53	1,4607	106	5,8427
58	1,9788	4	0,0088	57	1,8050	1	0,00052	54	1,5163	107	5,9535
59	2,0476	5	0,0138	58	1,8688	2	0,0021	55	2,5730	108	6,0653
60	2,1176	6	0,0200	59	1,9338	3	0,0047	56	1,6307	109	6,1781
61	2,1888	7	0,0272	60	2,0000	4	0,0083	57	1,6895	110	6,2920
62	2,2611	8	0,0355	61	2,0672	5	0,0130	58	1,7493	111	6,4069
63	2,3347	9	0,0450	62	2,1355	6	0,0187	59	1,8101	112	6,5229
64	2,4094	10	0,0555	63	2,2050	7	0,0255	60	1,8720	113	6,6399
65	2,4852	11	0,0672	64	2,2755	8	0,0333	61	1,9349	114	6,7579
66	2,5623	12	0,0800	65	2,3472	9	0,0421	62	1,9989	115	6,8770
67	2,6405	13	0,0938	66	2,4200	10	0,0520	63	2,0639	115,38	6,9225
68	2,7200	14	0,1088	67	2,4938	11	0,0629	64	2,1299		
69	2,8005	15	0,1250	68	2,5688	12	0,0749	65	2,1970		
70	2,8823	16	0,1422	69	2,6450	13	0,0879	66	2,2651		
71	2,9652	17	0,1605	70	2,7222	14	0,1019	67	2,3343		
72	3,0494	18	0,1800	71	2,8005	15	0,1170	68	2,4045		
73	3,1347	19	0,2005	72	2,8800	16	0,1331	69	2,4757		
74	3,2211	20	0,2222	73	2,9605	17	0,1503	70	2,5480		
75	3,3088	21	0,2450	74	3,0422	18	0,1685	71	2,6213		
76	3,3976	22	0,2688	75	3,1250	19	0,1877	72	2,6957		
77	3,4876	23	0,2938	76	3,2088	20	0,2080	73	2,7711		
78	3,5788	24	0,3200	77	3,2938	21	0,2293	74	2,8475		
79	3,6711	25	0,3472	78	3,3800	22	0,2517	75	2,9250		
80	3,7647	26	0,3755	79	3,4672	23	0,2751	76	3,0035		
81	3,8594	27	0,4050	80	3,5555	24	0,2995	77	3,0831		
82	3,9552	28	0,4355	81	3,6450	25	0,3250	78	3,1637		
83	4,0523	29	0,4672	82	3,7355	26	0,3515	79	3,2453		
84	4,1505	30	0,5000	83	3,8272	27	0,3791	80	3,3280		
88	4,2500	31	0,5338	84	3,9200	28	0,4077	81	3,4117		
86	4,3505	32	0,5688	85	4,0138	29	0,4373	82	3,4965		
87	4,4523	33	0,6050	86	4,1088	30	0,4680	83	3,5823		
88	4,5552	34	0,6422	87	4,2050	31	0,4997	84	3,6691		
89	4,6594	35	0,6805	88	4,3022	32	0,5325	85	3,7570		
90	4,7647	36	0,7200	89	4,4005	33	0,5663	86	3,8459		
91	4,8711	37	0,7605	90	4,5000	34	0,6011	87	3,9359		
92	4,9788	38	0,8022	91	4,6005	35	0,6370	88	4,0269		
93	5,0876	39	0,8450	92	4,7022	36	0,6739	89	4,1189		
94	5,1976	40	0,8888	93	4,8050	37	0,7119	90	4,2120		
95	5,3088	41	0,9338	94	4,9088	38	0,7509	91	4,3061		
96	5,4211	42	0,9800	95	5,0138	39	0,7909	92	4,4013		
97	5,5347	43	1,0272	96	5,1200	40	0,8320	93	4,4975		
98	5,6494	44	1,0755	97	5,2272	41	0,8741	94	4,5947		
99	5,7652	45	1,1250	98	5,3555	42	0,9173	95	4,6930		
100	5,8823	46	1,1755	99	5,4450	53	0,9615	96	4,7923		
101	6,0005	47	1,2272	100	5,5555	44	1,0067	97	4,8927		
102	6,1200	48	1,2800	101	5,6672	45	1,0530	98	4,9941		
		49	1,3338	102	5,7800	46	1,1003	99	5,0965		
p = ± 900 (metros)		50	1,3888	103	5,8938	47	1,1487	100	5,2000		
		51	1,4450	104	6,0088	48	1,1981	101	5,3045		
		52	1,5022	105	6,1250	49	1,2485	102	5,4101		
0	0,0000	53	1,5605	106	6,2422	50	1,3000	103	5,5167		
1	0,0005	54	1,6200	107	6,3605	51	1,3525	104	5,6243		
2	0,0022	55	1,6805	108	6,4800	52	1,4061	105	5,7330		

p = ± 1.000 (metros)	
0	0,0000
1	0,0005
2	0,0020
3	0,0045
4	0,0080
5	0,0125
6	0,0180
7	0,0245
8	0,0320
9	0,0405
10	0,0500
11	0,0605
12	0,0720
13	0,0845
14	0,0980
15	0,1125
16	0,1280
17	0,1445
18	0,1620
19	0,1805
20	0,2000
21	0,2205
22	0,2420
23	0,2645
24	0,2880
25	0,3125
26	0,3380
27	0,3645
28	0,3920
29	0,4205
30	0,4500
31	0,4805
32	0,5120
33	0,5445
34	0,5780
35	0,6125
36	0,6480

$p = \pm 1.000$ (metros)		$p = \pm 1.000$ (metros)		$p = \pm 1.100$ (metros)		$p = \pm 1.100$ (metros)		$p = \pm 1.100$ (metros)		$p = \pm 1.200$ (metros)	
$\pm x$	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$	$\pm x$	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$	$\pm x$	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$	$\pm x$	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$	$\pm x$	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$	$\pm x$	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$
37	0,6845	90	4,0500	17	0,1313	70	2,2272	123	6,8768	39	0,6337
38	0,7220	91	4,1405	18	0,1472	71	2,2913	124	6,9890	40	0,6666
39	0,7605	92	4,2320	19	0,1640	72	2,3563	125	7,1022	41	0,7004
40	0,8000	93	4,3245	20	0,1818	73	2,4222	126	7,2163	42	0,7349
41	0,8405	94	4,4180	21	0,2004	74	2,4890	127	7,3313	43	0,7704
42	0,8820	95	4,5125	22	0,2200	75	2,5568	128	7,4472	44	0,8066
43	0,9245	96	4,6080	23	0,2404	76	2,6254	129	7,5640	45	0,8437
44	0,9680	97	4,7045	24	0,2618	77	2,6950	130	7,6818	46	0,8816
45	1,0125	98	4,8020	25	0,2840	78	2,7654	131	7,8004	47	0,9204
46	1,0580	99	4,9005	26	0,3072	79	2,8368	132	7,9200	48	0,9600
47	1,1045	100	5,0000	27	0,3313	80	2,9090			49	1,0004
48	1,1520	101	5,1005	28	0,3563	81	2,9822	$p = \pm 1.200$ (metros)		50	1,0416
49	1,2005	102	5,2020	29	0,3822	82	3,0563			51	1,0837
50	1,2500	103	5,3044	30	0,4091	83	3,1313			52	1,1266
51	1,3005	104	5,4080	31	0,4368	84	3,2072	0	0,0000	53	1,1703
52	1,3520	105	5,5125	32	0,4654	85	3,2840	1	0,0004	54	1,2150
53	1,4045	106	5,6180	33	0,4950	86	3,3618	2	0,0016	55	1,2604
54	1,4580	107	5,7245	34	0,5254	87	3,4404	3	0,0037	56	1,3066
55	1,5125	108	5,8320	35	0,5568	88	3,5200	4	0,0066	57	1,3537
56	1,5680	109	5,9405	36	0,5890	89	3,6004	5	0,0104	58	1,4016
57	1,6245	110	6,0500	37	0,6222	90	3,6818	6	0,0150	59	1,4504
58	1,6820	111	6,1605	38	0,6563	91	3,7640	7	0,0204	60	1,5000
59	1,7405	112	6,2720	39	0,6913	92	2,8472	8	0,0266	61	1,5503
60	1,8000	113	6,3845	40	0,7272	93	3,9313	9	0,0337	62	1,6016
61	1,8605	114	6,4980	41	0,7640	94	4,0163	10	0,0416	63	1,6537
62	1,9220	115	6,6125	42	0,8018	95	4,1022	11	0,0504	64	1,7066
63	1,9845	116	6,7280	43	0,8404	96	4,1890	12	0,0600	65	1,7603
64	2,0480	117	6,8445	44	0,8800	97	4,2768	13	0,0704	66	1,8150
65	2,1125	118	6,9620	45	0,9204	98	4,3654	14	0,0816	67	1,8703
66	2,1780	119	7,0805	46	0,9618	99	4,4550	15	0,0937	68	1,9266
67	2,2445	120	7,2000	47	1,0040	100	4,5454	16	0,1066	69	1,9837
68	2,3120			48	1,0472	101	4,6368	17	0,1204	70	2,0415
69	2,3805	$p = \pm 1.100$ (metros)		49	1,0913	102	4,7290	18	0,1350	71	2,1003
70	2,4500			50	1,1363	103	4,8222	19	0,1504	72	2,1600
71	2,5205			51	1,1822	104	4,9163	20	0,1666	73	2,2203
72	2,5920			52	1,2290	105	5,0113	21	0,1837	74	2,2816
73	2,6645	0	0,0000	53	1,2768	106	5,1072	22	0,2016	75	2,3437
74	2,7380	1	0,0004	54	1,3254	107	5,2040	23	0,2204	76	2,4066
75	2,8125	2	0,0018	55	1,3750	108	5,3018	24	0,2400	77	2,4703
76	2,8880	3	0,0041	56	1,4254	109	5,4004	25	0,2604	78	2,5350
77	2,9645	4	0,0072	57	1,4768	110	5,5000	26	0,2816	79	2,6003
78	3,0420	5	0,0113	58	1,5290	111	5,60 4	27	0,3037	80	2,6666
79	3,1205	6	0,0163	59	1,5822	112	5,7018	28	0,3266	81	2,7337
80	3,2000	7	0,0222	60	1,6363	113	5,8040	29	0,3504	82	2,8016
81	3,2805	8	0,0290	61	1,6913	114	5,9072	30	0,3750	83	2,8703
82	3,3620	9	0,0368	62	1,7472	115	6,0113	31	0,4004	84	2,9400
83	3,4445	10	0,0454	63	1,8040	116	6,1163	32	0,4266	85	3,0103
84	3,5280	11	0,0550	64	1,8618	117	6,2222	33	0,4537	86	3,0816
85	3,6125	12	0,0654	65	1,9204	118	6,3290	34	0,4816	87	3,1536
86	3,6980	13	0,0768	66	1,9800	119	6,4368	35	0,5104	88	3,2266
87	3,7845	14	0,0890	67	2,0404	120	6,5454	36	0,5400	89	3,3003
88	3,8720	15	0,1022	68	2,1018	121	6,6550	37	0,5704	90	3,3750
89	3,9605	16	0,1163	69	2,1640	122	6,7654	38	0,6016	91	3,4503

$p = \pm 1.200$ (metros)		$p = \pm 1.300$ (metros)		$p = \pm 1.300$ (metros)		$p = \pm 1.300$ (metros)		$p = \pm 1.400$ (metros)		$p = \pm 1.400$ (metros)	
$\pm x$	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$	$\pm x$	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$	$\pm x$	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$	$\pm x$	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$	$\pm x$	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$	$\pm x$	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$
92	3,5266	0	0,0000	53	1,0803	106	4,3213	0	0,0000	53	1,0028
93	3,6036	1	0,0004	54	1,1215	107	4,4033	1	0,0003	54	1,0410
94	3,6816	2	0,0015	55	1,1634	108	4,4860	2	0,0014	55	1,0800
95	3,7603	3	0,0034	56	1,2061	109	4,5694	3	0,0032	56	1,1195
96	3,8400	4	0,0061	57	1,2495	110	4,6536	4	0,0057	57	1,1598
97	3,9203	5	0,0096	58	1,2938	111	4,7386	5	0,0089	58	1,2010
98	4,0016	6	0,0138	59	1,3388	112	4,8244	6	0,0128	59	1,2427
99	4,0836	7	0,0188	60	1,3846	113	4,9109	7	0,0175	60	1,2852
100	4,1666	8	0,0246	61	1,4311	114	4,9982	8	0,0228	61	1,3283
101	4,2503	9	0,0311	62	1,4784	115	5,0863	9	0,0290	62	1,3723
102	4,3350	10	0,0384	63	1,5264	116	5,1751	10	0,0357	63	1,4170
103	4,4203	11	0,0465	64	1,5753	117	5,2648	11	0,0431	64	1,4622
104	4,5066	12	0,0553	65	1,6250	118	5,3552	12	0,0514	65	1,5083
105	4,5936	13	0,0650	66	1,6753	119	5,4463	13	0,0603	66	1,5550
106	4,6815	14	0,0753	67	1,7264	120	5,5382	14	0,0700	67	1,6025
107	4,7703	15	0,0865	68	1,7784	121	5,6309	15	0,0803	68	1,6507
108	4,8600	16	0,0984	69	1,8310	122	5,7204	16	0,0913	69	1,6996
109	4,9503	17	0,1111	70	1,8845	123	5,8186	17	0,1031	70	1,7493
110	5,0415	18	0,1246	71	1.9387	124	5,9136	18	0,1156	71	1,7996
111	5,1336	19	0,1388	72	1,9937	125	6,0094	19	0,1288	72	1,8506
112	5,2266	20	0,1538	73	2,0495	126	6,1060	20	0,1428	73	1,9024
113	5,3203	21	0,1696	74	2,1060	127	6,2032	21	0,1574	74	1,9550
114	5,4150	22	0,1861	75	2,1633	128	6,3013	22	0,1727	75	2,0081
115	5,5103	23	0,2034	76	2,2214	129	6,4001	23	0,1888	76	2,0620
116	5,6065	24	0,2215	77	2,2803	130	6,4997	24	0,2056	77	2,1166
117	5,7036	25	0,2403	78	2,3400	131	6,6001	25	0,2231	78	2,1720
118	5,8015	26	0,2600	79	2,4002	132	6,7013	26	0,2413	79	2,2280
119	5,9003	27	0,2803	80	2,4614	133	6,8032	27	0,2602	80	2,2848
120	6,0000	28	0,3015	81	2,5233	134	6,9058	28	0,2798	81	2,3422
121	6,1003	29	0,3234	82	2,5860	135	7,0093	29	0,3002	82	2,4004
122	6,2015	30	0,3461	83	2,6495	136	7,1135	30	0,3213	83	2,4592
123	6,3036	31	0,3696	84	2,7137	137	7,2185	31	0,3430	84	2,5190
124	6,4065	32	0,3938	85	2,7787	138	7,3243	32	0,3655	85	2,5793
125	6,5103	33	0,4188	86	2,8445	139	7,4308	33	0,3887	86	2,6403
126	6,6148	34	0,4445	87	2,9110	140	7,5381	34	0,4126	87	2,7021
127	6,7203	35	0,4711	88	2,9783	141	7,6462	35	0,4373	88	2,7646
128	6,8265	36	0,4984	89	3,0464	142	7,7550	36	0,4626	89	2,8277
129	6,9336	37	0,5265	90	3,1153	143	7,8646	37	0,4887	90	2,8917
130	7,0415	38	0,5553	91	3,1848	144	7,9750	38	0,5155	91	2,9563
131	7,1503	39	0,5850	92	3,2552	145	8,0862	39	0,5430	92	3,0216
132	7,2598	40	0,6153	93	3,3264	146	8,1981	40	0,5712	93	3,0876
133	7,3703	41	0,6465	94	3,3983	147	8,3108	41	0,6001	94	3,1544
134	7,4815	42	0,6784	95	3,4710	148	8,4242	42	0,6297	95	3,2220
135	7,5936	43	0,7111	96	3,5444	149	8,5385	43	0,6600	96	3,2901
136	7,7065	44	0,7445	97	3,6187	150	8,6535	44	0,6911	97	3,3590
137	7,8202	45	0,7788	98	3,6937	151	8,7692	45	0'7229	98	3,4286
138	7,9348	46	0,8138	99	3,7694	152	8,8858	46	0,7554	99	3,5000
139	8,0502	47	0,8495	100	3,8460	153	9,0031	47	0,7886	100	3,5710
140	8,1665	48	0,8861	101	3,9133	154	9,1211	48	0,8225	101	3,6427
141	8,2836	49	0,9234	102	4,0014	155	9,2400	49	0,8571	102	3,7152
142	8,4015	50	0,9615	103	4,0802	156	9,3596	50	0,8925	103	3,7884
143	8,5203	51	1,0003	104	4,1598			51	0,9285	104	3,8623
144	8,6398	52	1,0400	105	4,2402			52	0,9653	105	3,9370

p = ± 1.400 (metros)		p = ± 1.400 (metros)		p = ± 1.500 (metros)		p = ± 1.500 (metros)		p = ± 1.500 (metros)		p = ± 2.000 (metros)	
± x	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$	± x	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$	± x	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$	± x	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$	± x	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$	± x	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$
106	4,0123	159	9,0278	38	0,4812	91	2,7600	144	6,9113	11	0,0302
107	4,0884	160	9,1417	39	0,5070	92	2,8210	145	7,0076	12	0,0360
108	4,1652	161	9,2563	40	0,5332	93	2,8827	146	7,1046	13	0,0422
109	4,2427	162	9,3717	41	0,5602	94	2,9450	147	7,2022	14	0,0490
110	5,3209	163	9,4877	42	0,5880	95	3,0080	148	7,3006	15	0,0562
111	4,3998	164	9,6045	43	0,6162	96	3,0716	149	7,3995	16	0,0640
112	4,4794	165	9,7220	44	0,6452	97	3,1360	150	7,4992	17	0,0722
113	4,5598	166	9,8402	45	0,6750	98	3,2010	151	7 5995	18	0,0810
114	4,6408	167	9,9591	46	0,7052	99	3,2666	152	7,7005	19	0,0902
115	4,7226	168	10,0787	47	0,7362	100	3,3333	153	7,8022	20	0,1000
116	4,8051			48	0,7680	101	3,4000	154	7,9045	21	0,1102
117	4,8883			49	0,8002	102	3,4676	155	8,0075	22	0,1210
118	4,9722	p = ± 1.500 (metros)		50	0,8332	103	3,5359	156	8,1111	23	0,1322
119	5,0568			51	0,8670	104	3,6050	157	8,2155	24	0,1440
120	5,1422			52	0,9012	105	3,6746	158	8,3205	25	0,1562
121	5,2283	0	0,0000	53	0,9362	106	3,7450	159	8,4261	26	0,1690
122	5,3150	1	0,0003	54	0,9720	107	3,8160	160	8,5324	27	0,1822
123	5,4025	2	0,0013	55	1,0082	108	3,8876	161	8,6394	28	0,1960
124	5,4907	3	0,0030	56	1,0452	109	3,9600	162	8,7471	29	0,2102
125	5,5796	4	0,0053	57	1,0828	110	4,0330	163	8,8554	30	0,2250
126	5,6693	5	0,0083	58	1,1212	111	4,1065	164	8,9644	31	0,2402
127	5,7596	6	0,0120	59	1,1602	112	4,1809	165	9,0740	32	0,2560
128	5,8507	7	0,0163	60	1,1998	113	4,2560	166	9,1844	33	0,2722
129	5,9425	8	0,0213	61	1,2402	114	4,3315	167	9,2954	34	0,2890
130	6,0350	9	0,0270	62	1,2812	115	4,4078	168	9,4070	35	0,3062
131	6,1281	10	0,0333	63	1,3228	116	4,4848	169	9,5193	36	0,3240
132	6,2221	11	0,0403	64	1,3651	117	4,5625	170	9,6323	37	0,3422
133	0,3167	12	0,0480	65	1,4081	118	4,6408	171	9,7460	38	0,3610
134	6,4120	13	0,0563	66	1,4518	119	4,7198	172	9,8603	39	0,3802
135	6,5081	14	0,0653	67	1,4961	120	4,7995	173	9,9753	40	0,4000
136	6,6050	15	0,0750	68	1,5411	121	4,8798	174	10,0910	41	0,4202
137	5,7024	16	0,0853	69	1,5868	122	4,9608	175	10,2073	42	0,4410
138	6,8006	17	0,0963	70	1,6331	123	5,0424	176	10,3243	43	0,4622
139	6,8995	18	0,1080	71	1,6801	124	5,1248	177	10,4419	44	0,4840
140	6,9991	19	0,1203	72	1,7278	125	5,2078	178	10,5602	45	0,5062
141	7,0995	20	0,1333	73	1,7761	126	5,2914	179	10,6792	46	0,5290
142	7,2005	21	0,1470	74	1,8251	127	5,3757	180	10,7990	47	0,5522
143	7,3023	22	0,1613	75	1,8748	128	5,4607			48	0,5760
144	7,4048	23	0,1763	76	1,9251	129	5,5464			49	0,6002
145	7,5080	24	0,1920	77	1,9761	130	5,6327	p = ± 2.000 (metros)		50	0,6050
146	7,6120	25	0,2083	78	2,0277	131	5,7197			51	0,6502
147	7,7165	26	0,2253	79	2,0801	132	5,8074			52	0,6760
148	7,8220	27	0,2430	80	2,1331	133	5,8957	0	0,0000	53	0,7022
149	7,9280	28	0,2613	81	2,1867	134	5,9847	1	0,0002	54	0,7290
150	8,0347	29	0,2803	82	2,2411	135	6,0743	2	0,0010	55	0,7562
151	8,1422	30	0,3000	83	2,2961	136	6,1647	3	0,0022	56	0,7840
152	8,2504	31	0,3203	84	2,3517	137	6,2557	4	0,0040	57	0,8122
153	8,3593	32	0,3412	85	2,4080	138	6,3473	5	0,0062	58	0,8410
154	8,4689	33	0,3629	86	2,4650	139	6,4396	6	0,0090	59	0,8702
155	8,5793	34	0,3852	87	2,5227	140	6,5326	7	0,0122	60	0,9000
156	8,6903	35	0,4082	88	2,5810	141	6,6263	8	0,0160	61	0,9302
157	8,8021	36	0,4319	89	2,6400	142	6,7206	9	0,0202	62	0,9610
158	8,9146	37	0,4562	90	2,6997	143	6,8156	10	0,0250	63	0,9922

p = ± 2.000 (metros)		p = ± 2.000 (metros)		p = ± 2.000 (metros)		p = ± 2.000 (metros)		p = ± 2.000 (metros)		p = ± 2.000 (metros)	
$\pm x$	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$	$\pm x$	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$	$\pm x$	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$	$\pm x$	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$	$\pm x$	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$	$\pm x$	$z = \pm \frac{x^2}{2p}$
64	1,0240	94	2,2090	124	3,8440	154	5,9290	184	8,4640	214	11,4490
65	1,0562	95	2,2562	125	3,9062	155	6,0062	185	8,5562	215	11,5562
66	1,0890	96	2,3040	126	3,9690	156	6,0840	186	8,6490	216	11,6640
67	1,1222	97	2,3522	127	4,0322	157	6,1622	187	8,7422	217	11,7722
68	1,1560	98	2,4010	128	4,0960	158	6,2410	188	8,8360	218	11,8810
69	1,1902	99	2,4502	129	4,1602	159	6,3202	189	8,9302	219	11,9902
70	1,2250	100	2,5000	130	4,2250	160	6,4000	190	9,0250	220	12,1000
71	1,2602	101	2,5502	131	4,2902	161	6,4802	191	9,1202	221	12,2102
72	1,2960	102	2,6010	132	4,3560	162	6,5610	192	9,2160	222	12,3210
73	1,3322	103	2,6522	133	4,4222	163	6,6422	193	9,3122	223	12,4322
74	1,3690	104	2,7040	134	4,4890	164	6,7240	194	9,4090	224	12,5440
75	1,4062	105	2,7562	135	4,5562	165	6,8062	195	9,5062	225	12,6562
76	1,4440	106	2,8090	136	4,6240	166	6,8890	196	9,6040	226	12,7690
77	1,4822	107	2,8622	137	4,6922	167	6,9722	197	9,7022	227	12,8822
78	1,5210	108	2,9160	138	4,7610	168	7,0560	198	9,8010	228	12,9960
79	1,5602	109	2,9702	139	4,8302	169	7,1402	199	9,9002	229	13,1102
80	1,6000	110	3,0250	140	4,9000	170	7,2250	200	10,0000	230	13,2250
81	1,6402	111	3,0802	141	4,9702	171	7,3102	201	10,1002	231	13,3402
82	1,6810	112	3,1360	142	5,0410	172	7,3960	202	10,2010	232	13,4560
83	1,7222	113	1,1922	143	5,1122	173	7,4822	203	10,3022	233	13,5722
84	1,7640	114	3,2490	144	5,1840	174	7,5690	204	10,4040	234	13,6890
85	1,8062	115	3,3062	145	5,2562	175	7,6562	205	10,5062	235	13,8062
86	1,8490	116	3,3640	146	5,3290	176	7,7440	206	10,6090	236	13,9240
87	1,8922	117	3,4222	147	5,4022	177	7,8322	207	10,7122	237	14,0422
88	1,9360	118	3,4810	148	5,4760	178	7,9210	208	10,8160	238	14,1610
89	1,9802	119	3,5402	149	5,5502	179	8,0102	209	10,9200	239	14,2802
90	2,0250	120	3,6000	150	5,6250	180	8,1000	210	11,0250	240	14,4000
91	2,0702	121	3,6602	151	5,7002	181	8,1902	211	11,1302		
92	2,1160	122	3,7210	152	5,7760	182	8,2810	212	11,2360		
93	2,1622	123	3,7822	153	5,8522	183	8,3722	213	11,3422		

(Continua)

Ainda as observações a propósito do artigo sôbre a determinação das deformações na barragem de S.ta Luzia

1. Ao ler o artigo do Eng.º Pinto Machado, publicado em Março, deparei com uma frase a que não pude dar senão uma interpretação com que, porém, não estava de acôrdo.

Para pôr a questão com clareza transcrevi, na nota de Abril, essa frase e expuz, em termos inequívocos, a interpretação que julgo, ainda agora, devida, embora não possa ser consentida. Essa interpretação não foi refutada.

Não é possível deduzir dos deslocamentos (lineares ou angulares) dum número finito de pontos (ou segmentos) dum sólido em deformação elástica a distribuïção das tensões nêle desenvolvidas — tal é a minha tese.

O Eng.º Pinto Machado, no artigo primitivo, não só disse o contrário como citou a existência dum *processo indirecto apoiado nas próprias hipóteses de cálculo*. Mas, nem então nem na *Resposta* de Maio, dá a justificação do que disse e tão pouco descreve o processo.

2. Vejamos o problema concisamente. As equações que ligam as tensões normais (σ_x, σ_y, σ_z) e tangenciais (τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{xz}) (Fig. 1) com os deslocamentos (u, v, w) (Fig. 2) são

$$\sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\ ,\quad \tau_{yz} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

$$\sigma_y = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\ ,\quad \tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right),$$

$$\sigma_z = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}\ ,\quad \tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

representando por λ e μ os coeficientes de Lamé e por θ a deformação cúbica

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\ .$$

Vê-se que para calcular as tensões (σ, τ) num ponto seria necessário conhecer as variações dos deslocamentos (u, v, w) segundo as três direcções (x, y, z). Isso não é, porém, nem de longe, realizável.

Consideremos o caso de observações sôbre uma obra de betão, numa zona tal que se possa considerar uniforme a distribuïção de tensões num intervalo tão grande como $\Delta x = 100$ cm e em que o betão esteja sujeito

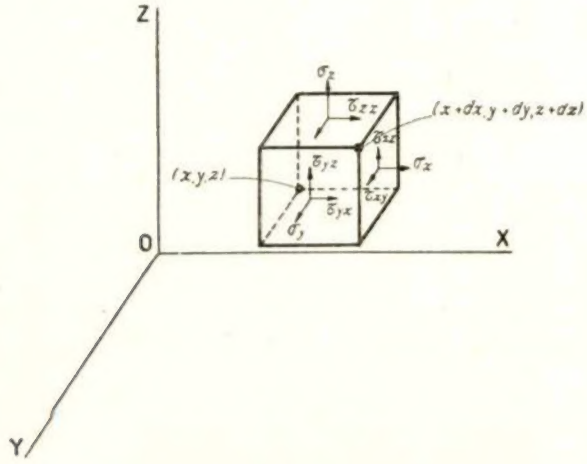


Fig. 1

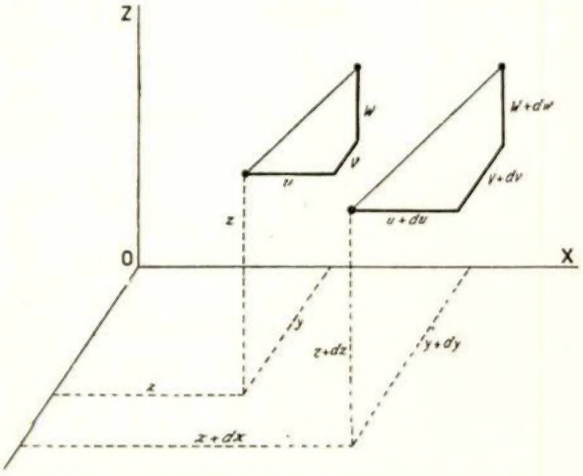


Fig. 2

apenas à tensão $\sigma_x = 40\ \mathrm{kgcm^{-2}}$. Será, nesse intervalo, admitindo $E = 2 \times 10^5\ \mathrm{kgcm^{-2}}$,

$$\Delta u = \frac{\Delta x \,.\, \sigma_x}{E} = \frac{100 \times 40}{2 \times 10^5} = 2 \times 10^{-2}\ \mathrm{cm} = \\ = 0{,}2\ \mathrm{mm}\ .$$

Por conseguinte, para que Δu, e portanto σ_x, viesse avaliado com um êrro relativo inferior a 10 %, seria necessário medir, em relação a um sistema exterior fixo de referência, os 2 deslocamentos u, nos extremos do intervalo Δx, com um êrro absoluto inferior a 0,01 mm. Isso é impossível, dentro das condições actualmente realizáveis.

No caso de observações dentro do laboratório, é possível atingir, em condições óptimas, aquela precisão de 0,01 mm na medição dos u. Mas ela é, então, também insuficiente, porque, no laboratório, em que se trabalhará sôbre modêlo, não se poderá consentir um Δx da ordem dos 100 cm.

3. Passemos à segunda observação. O Eng.º Pinto Machado escreveu, ao considerar o extensómetro representado, nas figs. 7 e 8 do artigo de Março, em posição radial que *os esforços no sentido radial ao arco são muito pequenos.*

Chama-se tensão (ou esfôrço) *radial* (Fig. 3) à tensão normal σ_y exercida sôbre uma faceta normal à direcção radial Oy [1]. Ela não tem nada que ver com a tensão tangencial τ_{xy}.

Ora, na sua *Resposta* do mês passado, o Eng.º Pinto Machado recorre, por meio dum cálculo apresentado aliás com falta de clareza, ao esfôrço transverso, ou seja, implicitamente, às tensões tangenciais $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, para fazer valer a sua afirmação de que *os esforços no sentido radial ao arco são muito pequenos.*

A confusão é tanto mais grave quanto é certo que a deformação unitária acusada pelo extensómetro colocado radialmente é

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_z + \sigma_x)$$

(E é o módulo de elasticidade e ν o coeficiente de Poisson). Quere dizer: ela é independente das tensões tangenciais τ, em especial das $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, que o Eng.º Pinto Machado trouxe à baila.

4. Num elemento de volume encostado ao paramento de montante, a tensão radial σ_y é igual à pressão hidrostática p. Noutro, encostado ao paramento de jusante, é $\sigma_y = 0$. Entre êstes limites, σ_y decresce continuamente desde p até 0.

E não há, como já disse, razão para prever uma diminuïção rápida do valor da tensão radial, de montante para jusante. É ver o que se passa numa viga recta [2] ou num cilindro circular ôco [3].

A afirmação de que as tensões radiais são muito pequenas só será pois verdadeira, para a vizinhança do paramento de montante, na medida em que se puder tomar por pequena a pressão hidrostática p.

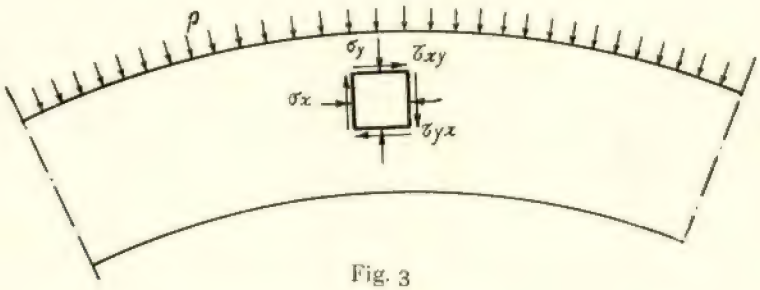


Fig. 3

A barragem de Santa Luzia tem mais de 70 m de altura. Quando a albufeira estiver cheia, haverá pontos em que a tensão radial será portanto superior aos 7 $\mathrm{kgcm^{-2}}$ que apontei na minha nota de Abril. E nos pontos, próximos do paramento de montante, que ficam

(1) Cf., v. g., Timoshenko, *Strength of Materials, Part II*, pág. 236 (edição de 1942).

(2) Pigeaud, *Résistance des Matériaux et Élasticité, Tome I*, pág. 337, (edição de 1934).

(3) Timoshenko, op. cit., *Part II*, pág. 240.

37 m debaixo de água, onde estão montados os extensómetros Coyne para os quais o Eng.º Pinto Machado aponta uma tensão radial inferior a 1 $kgcm^{-2}$, ela será de facto pouco inferior a 3,7 $kgcm^{-2}$.

5. Guardei para o fim, na intenção de não prejudicar o esclarecimento das divergências que efectivamente têm estado em causa, a resposta a um grupo de interrogações formuladas, na sua *Resposta*, pelo Eng.º Pinto Machado e que nada têm que ver com aquelas divergências.

1.ª pregunta — Se *não será a medição das flechas num muro de suporte em betão armado um belo método para determinar, com razoável aproximação, as tensões desenvolvidas?*

Resposta — Não. De facto, imaginemos um muro de suporte, de betão armado, e suponhamos perfeitamente conhecidas as suas condições de ligação exterior, i. e., suponhamos que temos a certeza de o muro estar, por exemplo, perfeitamente encastrado e que conhecemos o sistema de fôrças (impulsão das terras e pêso próprio) a que êle vai ser sujeito.

Nessas condições, pela aplicação de determinadas regras de cálculo — a que corresponde determinada distribuïção das tensões desenvolvidas no muro — avaliamos as flechas que se produzirão por efeito da aplicação das fôrças exteriores.

Meçamos depois as flechas efectivamente produzidas nessas condições. Se elas coïncidem com as calculadas, e se os pontos em que fizemos a comparação são em número suficientemente grande, temos o direito de considerar as regras de cálculo adoptadas — e a distribuïção de tensões que lhes corresponde — como *confirmadas* experimentalmente.

Mas se houver divergência, a única conclusão a tirar é que as regras de cálculo não estão certas. Mas, como modificá-las? Não sabemos.

2.ª pregunta — Se *não terá sido a medição das flechas um precioso incitador da evolução dos métodos de cálculo dos sistemas hiperstáticos?*

Resposta — Não foi! Talvez tenha sido, nalguma medida, *incitador* (não sei bem, de resto, qual é a significação precisa com que o Eng.º Pinto Machado emprega esta palavra), mas não ao ponto de merecer ser considerado *precioso* (1).

3.ª pregunta — *Para que serviriam os complicados trabalhos de medição das flechas?*

Resposta — Para confirmar ou negar os valores previstos para essas flechas por determinadas regras de cálculo. Mais nada. E isso é muito diferente de servirem para calcular as tensões desenvolvidas nos sólidos em que são medidas.

4.ª pregunta — Se *não tem sido a comparação entre as flechas medidas e as calculadas o critério mais decisivo para a selecção dos métodos de cálculo?*

Resposta — Evidentemente que estamos todos de acôrdo em imediatamente considerar como esplêndido um método de cálculo que indica valores, para os deslocamentos lineares ou angulares dum grande número de pontos ou segmentos, em concordância com os observados.

É o caso, por exemplo, das confirmações obtidas experimentalmente para o método *trial load*, de cálculo de barragens, no *Bureau of Reclamation* dos U. S. A.

Repito: isso é porém muito diferente de servirem as medições das flechas para calcular as tensões desenvolvidas.

A seguir, vem mais uma pregunta que julgo desnecessário citar por estar abrangida na 2.ª e na 4.ª

Centro de Estudos de Engenharia Civil (I. A. C.), Junho de 1944.

PEDRO A. NUNES

(1) Cf. Hermite, *L'Expérience et les Théories nouvelles en Résistance des Matériaux*, pg.ªs 4 e 5.

Nova edição das

Normas e Regulamentos para Instalações Eléctricas

À venda na redacção da «Técnica»

UM CONCEITO DE PROBABILIDADE

(Continuação)

PELO ENG. CIVIL I. S. T. JOSÉ PINTO MACHADO

XI — Os problemas de probabilidade geométrica

Sejam dados n pontos, definidos pelas suas coordenadas $(x_i, y_i \ldots w_i)$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ no seio dum espaço em que tôda e qualquer ocorrência, que nêle venha a dar-se infinitas vezes, se reitere, igual número delas, sôbre todos os pontos dêsse espaço e, tomem-se dêsses n pontos, dois quaisquer dêles. Pregunta-se: qual é a probabilidade para que a distância entre êsses dois pontos, assim escolhidos, seja inferior, ou igual, a certo valor d fixado de antemão?

Assim enunciado, êste problema é, sem dúvida, um problema de probabilidade; todavia, a definição do conceito de probabilidade, tal como a apresentámos atrás, não o abrange. Nós, deixámos definido o conceito de probabilidade no seio dum espaço quântico, e não, no dum espaço dimensionado. Ora, o espaço que encerra êste problema compõe-se, por definição, de elementos que mantêm, entre si, obrigatòriamente, distâncias fixas e, conseqüentemente, o campo onde se desenrola a sua acção, não é, não pode ser, um espaço pontual quântico. Êsses espaços pontuais, caracterizados por os seus elementos constituintes manterem, obrigatòriamente, entre si, distâncias fixas, inalteráveis, designá-los-emos por espaços pontuais distanciados, distinguindo-os assim, daqueles espaços pontuais quânticos, para os quais, deixámos, em capítulos anteriores, definido o tal conceito de probabilidade.

Consideremos os n pontos do espaço do problema a resolver, e, depois de efectuarmos a medição das $\frac{n(n-1)}{2!}$ distâncias, distintas, que é possível estabelecer entre êsses n pontos, cataloguê-mo-las em dois grupos, segundo forem maiores, ou menores, que a tal distância d estabelecida de antemão. Suponhamos que encontrávamos que o número das distâncias maiores que d, eram S, o que acarreta, em conseqüência, compor-se o grupo das menores e iguais a d de, $\frac{n(n-1)}{2!} - S$ elementos. Obrigando-nos a um esfôrço de imaginação, tomemos o grupo de tôdas essas $\frac{n(n-1)}{2!}$ distâncias, como constituindo um espaço, em que tôda e qualquer ocorrência, que venha a dar-se no seu seio infinitas vezes, se repita igual número delas sôbre tôdas essas distâncias. Para o problema, assim delineado, agora sim, já o conceito de probabilidade, tal como atrás o deixámos definido, se aplica; agora, teremos que a relação:

$$p = \frac{\frac{n(n-1)}{2!} - S}{\frac{n(n-1)}{2!}} = 1 - \frac{S}{n(n-1)}$$

medirá a probabilidade, da medida de certa distância, que determinada ocorrência quis distinguir, ser inferior ou igual a d. Resumindo: foi-nos dado um problema que não soubemos resolver à luz do conceito de probabilidade, tal como o deixámos definido em capítulos anteriores, mas, tomando raízes nêle, soubemos construir um outro, para o qual nos foi possível encontrar, no campo dêsse conceito, a expressão que o resolve; aparentemente, pelo menos, parece que estamos em presença de dois problemas diferentes, mas, lembra preguntar, se realmente se distingue o que um e outro têm de essencial. Quem se der ao cuidado de analisar, com intenção filosófica, a maneira como foram definidas essas tais distâncias, que depois foram elevadas à categoria de elementos pontuais do novo espaço, verificará, que, em essência, ambos êsses dois problemas se confundem; sôbre isto não resta dúvida, a quem examinar com cuidado o assunto, e é, justamente essa, a razão porque não repugna tomar, a relação dada acima,

como medindo, também, a probabilidade da distância entre dois pontos escolhidos quaisquer, ao acaso, no nosso primeiro problema, ser inferior, ou igual, à tal dimensão d, cujo valor vem fixado no enunciado. No entanto, há uma marcada diferença entre ambos estes tipos de problemas. Naqueles que se desenvolvem em espaços quânticos, basta, para os resolver, saber contar, ao passo que, na resolução dos problemas que têm a sua acção em espaços distanciados, é indispensável, além de saber contar, de saber medir. Uma outra diferença importante, entre estes dois tipos de problema, reside no facto dos quânticos admitirem, como fórmulas resolventes, expressões algébricas servindo de resultado a tôda uma família de problemas, dado que é, quási sempre possível exprimir, por fórmulas algébricas com carácter geral, as leis de contagem, ao passo que, para os problemas distanciados, as fórmulas resolventes dizem respeito, ùnicamente a problemas muito particulares, visto ser, quási completamente impossível exprimirem-se algèbricamente, as leis, que simultâneamente meçam e contem. Esta dificuldade deve ter sido sentida, pelo menos subconscientemente, por todos aqueles que escreveram o magnífico capítulo das probabilidades, por isso que, só muito raramente, nêle se vê tratado qualquer problema distanciado.

Até aqui, temos apenas tratado de problemas cuja acção se desenrola em espaços constituídos por um número finito de elementos; agora, vamos procurar tratar daqueles cuja acção evolue no seio dos espaços infinitos. Seja, nessa ordem de idéias, um qualquer problema de probabilidade que tenha a sua acção num espaço quântico a n elementos, e suponhamos, que êsse número n de elementos aumenta progressivamente até atingir valores infinitos. A característica quântica manter-se-á inalterável qualquer que seja o número de elementos, que no decorrer desta operação que formem o espaço, mas, desde que o seu número atinja valores infinitos, os problemas revestem-se dum aspecto especial, que aconselha que os agrupemos num conjunto com características particulares que designaremos por grupo dos problemas quânticos de probabilidade geométricas. Assim se constitue um primeiro grupo de problemas infinitos Um outro, formar-se-á a partir do grupo dos problemas de probabilidade cuja acção se desenrola nos espaços dimensionados a n elementos, se considerarmos, por um processo de abstracção semelhante, o aumento do número de elementos dêsse espaço, para números infinitos. Nestas circunstâncias, também se verifica, tomarem os problemas uma feição particular logo que o número de elementos atinge valores infinitos sendo essa própria feição que nos levou a agrupá-los sob a designação de problemas distanciados de probabilidade geométrica. Temos então, em conseqüência, que a partir dos problemas quânticos com acção em espaços finitos, se passou, por extensão, para os problemas, também quânticos, mas com acção em espaços infinitos, e, dos problemas dimensionados, mas desenvolvidos em espaços finitos, se passou, por semelhante generalização, para problemas, também necessàriamente dimensionados, mas desenrolando-se em ambiente infinito. Pois bem: para o primeiro dêstes grupos isto é, para aquele que trata dos problemas quânticos de probabilidade geométrica, parece-nos possível arquitectar problemas interessantes, em número suficientemente grande para formar, e valer a pena formar, com êles, um capítulo importante dentro do cálculo das probabilidades, ao passo que, para os problemas distanciados, não; para êstes, sucede o que sucede aos problemas de probabilidade distanciados descontínuos, sôbre os quais, vimos que era impossível construir um edifício matemático, mas aqui, com a agravante e estôrvo das quantidade infinitas.

Aparentando uma certa oposição ao que se acaba de dizer está a circunstância curiosa, de terem sido os problemas do tipo distanciado, aqueles que primeiro foram enunciados e estudados. É isto, um dos aspectos interessantes da vida dêste capítulo das matemáticas, chamado das probabilidades geométricas. Esta particularidade tira, tão naturalmente, a sua justificação, do facto da operação, de contar quantidades infinitas, se ter apresentado ao espírito do homem, necessàriamente, depois da operação

de medir, que não pode ver-se nela motivo de estranheza; além disso, diga-se, reforçando as alegadas razões justificativas da prioridade, no aparecimento e estudo dêstes problemas, que muitos dêles se revestem duma roupagem, tão sugestiva, que, só ela, chega para explicar a atenção especial de que têm sido objecto.

Rematando considerações, temos, que não se nos afigura possível que os problemas distanciados de probabilidade geométrica possam vir, mesmo um dia, a constituir um capítulo dentro do cálculo das probabilidades, mas, que em contra partida temos a convicção de podermos formar, a partir dos problemas quânticos de probabilidade geométrica, um extenso e interessante capítulo dêsse cálculo. O estudo dêsse capítulo, deixámo-lo dito na introdução dêste trabalho, foi um dos motivos dêstes nossos artigos.

Vamos tentá-lo, mas, ainda antes disso, e por necessidade dêsse mesmo estudo, vamos intentar idear uma aritmética das quantidades infinitas em que êsses problemas se possam apoiar.

XII — Aritmética das quantidades infinitas

a) *Introdução*

No princípio, o infinito designou, em aritmética, a circunstância singular, muito estranha na aparência, de existir sempre um número inteiro, maior, que o maior número inteiro que a imaginação de qualquer é capaz de conceber. Êste aspecto singelo, que primeiramente revestiu êste conceito, foi-se perdendo com o caminhar dos tempos e o desgastar do uso, tendo a sua evolução, trilhado um sentido marcadamente geométrico, do que resultou passar a representar, além do número inteiro maior que o maior de todos êles, o número de pontos dum segmento de recta, o número de pontos duma área, o número de pontos dum volume, etc. Possuíu êste conceito, êste significado, durante todo um segundo período da sua vida. Não tardou porém, que se verificasse conveniente escolher um critério que servisse para distinguir, dum modo seguro, os diversos infinitos, e daí resultou o aparecimento dum novo capítulo das matemáticas.

Em regra, é pouco claro o modo como é apresentada a matéria dêste capítulo, sendo nossa opinião, que a causa responsável dessa má exposição e da falta duma atraente sistematização da noção de infinito, é o sabor geométrico com que tem havido marcada tendência em adornar a noção de infinito. Essa tendência, muito embora se apresente perfeitamente justificada pelo próprio sentido em que a evolução do conceito se tem orientado, é, na nossa opinião, a mais forte causa responsável do aspecto confuso que geralmente envolve a noção de infinito.

Ora bem: justamente o infinito, que é nosso intento estudar, não tem, absolutamente nada de geométrico; é todo pura aritmética, por isso que é apenas, e só, quantidade. Não tem nada, dissemos, de geométrico; isto não obsta, porém, que a geometria, vendo neste algoritmo um bom instrumento de trabalho, o não aproveite no acastelamento das suas lucubrações. Assim se compreende, por exemplo, que em volume de densidade pontual constante, seja uma esplêndida medida da cubicagem relativa, dêsses volumes, a quantidade de pontos que êsses mesmos volumes contêm. O estudo desta aritmética, das quantidades infinitas, vamos iniciá-lo por certo grupo delas, de aspecto particular, que agrupámos sob a designação, de quantidades infinitas de dimensões finitas. Veremos seguidamente, que, quando certas operações aritméticas incidem sôbre estas quantidades, se originam outras quantidades, também infinitas, mas que não estão incluídas entre as que compuseram êsse primeiro grupo. Estas outras quantidades, não são, ainda, tôdas da mesma espécie e por isso, seremos compelidos a formarmos, com elas, vários grupos distintos. O conjunto de todos êsses grupos, relacionados entre si, constituïrão, como veremos adiante, um todo, razoàvelmente lógico para poder ser aceite, como uma aritmética do infinito.

b) *Quantidades infinitas positivas de dimensões finitas e positivas*

1 — *Sua representação*

Seja p um número inteiro positivo e ∞^p o símbolo da unidade de medida das quantidades infinitas positivas a p dimensões; se o número real a exprimir a relação, entre certa quantidade a p dimensões, sôbre a qual impera o nosso desejo de a representar, e a quantidade unidade de medida das quantidades infinitas positivas a p dimensões, a tal quantidade que é nosso propósito representar sê-lo-á, com propriedade, pela expressão:

$$a\,\infty^p$$

Conforme com esta simbologia, temos que,

$$\lim_{x \to \infty} x\,\infty^p$$

representará, o maior número infinito positivo a p dimensões que é possível conceber.

Admitindo, como válido, o princípio, de ser a quantidade infinita imediatamente superior à maior quantidade infinita a p dimensões, igual à menor quantidade infinita a $p+1$ dimensões, podemos estabelecer a seguinte igualdade:

$$\lim_{a \to \infty} a\,\infty^p = \lim_{a \to 0} a\,\infty^{(p+1)}$$

que nos habilitará a construir a seguinte sucessão de símbolos, que vem a ser a série das quantidades infinitas positivas de dimensões finitas e positivas colocadas na ordem crescente dos seus valores:

$$\ldots \lim_{a \to 0} a\,\infty^0 \ldots a\,\infty^0 \ldots \lim_{a \to \infty} a\,\infty^0 = \lim_{a \to 0} a\,\infty^1 \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots a\,\infty^1 \ldots \lim_{a \to \infty} a\,\infty^1 = \lim_{a \to 0} a\,\infty^2 \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots a\,\infty^2 \ldots \lim_{a \to \infty} a\,\infty^2 = \lim_{a \to 0} a\,\infty^3 \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a\,\infty^{n-1} \ldots \lim_{a \to \infty} a\,\infty^{n-1} = \lim_{a \to 0} a\,\infty^n \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots a\,\infty^n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pois bem; é, justamente, a aritmética dêstes símbolos que vamos procurar fazer.

2 — *Propriedades das qualidades infinitas positivas de dimensões finitas e positivas*

a) *Análise operatória*

Propriedade primeira — Duas quantidades infinitas positivas, $a\,\infty^p$ e $b\,\infty^q$, dizem-se da mesma dimensão, sempre que:

a) $p = q$

b) nos casos limite de $\begin{cases} q = p + 1, \text{ para } b = 0 \text{ ou } a = \infty \\ p = q + 1, \text{ para } b = \infty \text{ ou } a = 0 \end{cases}$

Propriedade segunda — A soma de duas quantidades infinitas positivas da mesma dimensão, $a\,\infty^p$ e $b\,\infty^p$, é igual à quantidade infinita da mesma dimensão $c\,\infty^p$ sendo, $c = a + b$; assim:

$$a\,\infty^p + b\,\infty^p = (a + b)\,\infty^p = c\,\infty^p$$

Propriedade terceira — A diferença de duas quantidades infinitas positivas da mesma dimensão, $a\,\infty^p$ e $b\,\infty^p$, é igual à quantidade infinita da mesma dimensão $d\,\infty^p$ sendo, $d = a - b$; assim:

$$a\,\infty^p + b\,\infty^p = (a - b)\,\infty^p = d\,\infty^p$$

Observe-se, que sempre que fôr $b > a$, a quantidade infinita resultante não está figurada na sucessão dos símbolos representantes das quantidades infinitas positivas de dimensões finitas que demos atrás. Esta operação, da subtracção, é uma daquelas que nos mostra que as quantidades infinitas, abrangidas na simbologia apresentada, não são as únicas cuja existência se justifica e essa circunstância levou-nos, em conseqüência dum desejo de generalização, a construir um outro grupo de quantidades infinitas.

Propriedade quarta — O produto de duas quantidades infinitas positivas, $a\,\infty^p$ e $b\,\infty^q$,

Em tôda a parte, quando se fala de medicamentos, produtos químicos ou reagentes, a marca E. Merck goza duma reputação inegualável.

E. Merck

DARMSTADT • FÁBRICA DE PRODUTOS QUÍMICOS • DESDE 1827

Sondages. Etanchements. Consolidations "Procédés Ródio"

Sondagens geológicas
Estudo da resistência e permeabilidade de terrenos; laboratório geofísico
Consolidação e impermeabilização de terrenos e alvenarias por meio de injecções de cimento, produtos químicos, emulsão betuminosa Shellperm, etc.
Estacas de beton armado, sistema **Ródio** sem fazer trepidar o solo
Rebocos comprimidos por «cement gun»
Fundações em terrenos difíceis por congelação artificial, ou baixando o nível da água friática.

Sociedade Anónima com séde em PARIS

As melhores referências no paiz e no estrangeiro

Engenheiro delegado para Portugal

Walter Weyermann

P. do Município, 32-2°—LISBOA Tel. 2 8685

Laboratório de análises

Análises industriais — Análises de minérios — Metais e Ligas metálicas

---

CONSULTAS TÉCNICAS

Eng.° J. FIRMINO PEREIRA SANTOS
RUA DOS CORREEIROS, 113, 1.°
LISBOA

TELEF. 27310 - 29845 - 60112

OFICINAS E LABORATÓRIOS
DO
INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

As oficinas pedagógicas do Instituto Superior Técnico, de CARPINTARIA DE MOLDE, de INSTRUMENTOS DE PRECISÃO e de ELECTROTÉCNICA, fornecem todo o género de material escolar e de demonstração para o ensino técnico. Nos laboratórios de QUÍMICA ANALÍTICA, FÍSICA INDUSTRIAL e de MINERALOGIA, executam-se análises para o público.

Para quaisquer informações dirigir-se ao secretário da comissão executiva

é igual à quantidade infinita positiva de dimensão $(p+q)$, $a.b.\infty^{(p+q)}$; assim:

$$a\infty^p . b\infty^q = a.b.\infty^{(p+q)}$$

Propriedade quinta — O quociente de duas quantidades infinitas positivas, $a\infty^p$ e $b\infty^q$, é igual à quantidade infinita de dimensão $(p-q)$, $\frac{a}{b}\infty^{(p-q)}$; assim:

$$\frac{a\infty^p}{b\infty^q} = \frac{a}{b}\infty^{(p-q)}$$

Observe-se, que sempre que fôr $q > p$ a quantidade infinita resultante desta operação, não está figurada na sucessão dos símbolos representativos das quantidades positivas de dimensões finitas e positivas que demos atrás. Esta operação da divisão, é uma outra daquelas, que nos mostra, que as quantidades infinitas abrangidas nessa sucessão, não são as únicas cuja existência se justifica.

Em conseqüência desta circunstância e dum natural desejo de generalização, resulta termos sido levados a estudar um novo grupo de quantidades infinitas, distinto de qualquer dos já mencionados.

Propriedade sexta — A potenciação finita e positiva de ordem k, duma quantidade infinita positiva de dimensão finita positiva, $a\infty^p$, é uma quantidade infinita positiva de dimensão $p.k$, $a^k\infty^{pk}$; assim:

$$(a\infty^p)^k = a^k\infty^{pk}$$

Propriedade sétima — A radiciação finita positiva de ordem k, duma quantidade infinita positiva de dimensão finita positiva, $a\infty^p$, é uma quantidade infinita de dimensão $\frac{p}{k}$, $a^{\frac{1}{k}}\infty^{\frac{p}{k}}$; assim:

$$\sqrt[k]{a\infty^p} = a^{\frac{1}{k}}\infty^{\frac{p}{k}}$$

quando $\frac{p}{k}$ fôr um número inteiro.

Propriedade oitava — Propriedade fundamental das quantidades infinitas positivas de dimensões finitas e positivas.

Teorema I — A quantidade infinita, diferença de duas quantidades infinitas positivas de dimensão finita e positiva p, é sempre superior à maior quantidade infinita positiva de dimensão finita e positiva $(p-1)$.

Demonstração: — Seja, $a\infty^p$, dum modo genérico, uma quantidade infinita positiva a dimensão finita e positiva p, e consideremos a quantidade infinita e positiva da mesma dimensão, de valor imediatamente superior, $\lim_{\varepsilon\to 0}(a+\varepsilon)\infty^p$.

A quantidade, diferença dêstes dois valores, será a resultante da operação:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(a+\varepsilon)\infty^p - a\infty^p = \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\infty^p$$

Mas, por outro lado, em conseqüência da própria maneira como a sucessão foi construída, temos a seguinte igualdade:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\infty^p = \lim_{x\to\infty} x\infty^{(p+1)}$$

que demonstra o teorema.

Resulta, em conseqüência dêste teorema, que a extracção a uma quantidade infinita de dimensão finita e positiva p, duma quantidade infinita positiva de dimensão finita e positiva inferior a p, não altera a posição dessa quantidade na sucessão das quantidades infinitas. Dando à palavra, valor, um significado mais amplo do que aquele que é costume atribuir-se-lhe, poderá dizer-se, que a soma ou subtracção duma quantidade infinita de dimensão inferior a p, a uma quantidade infinita a p dimensões, não lhe altera o valor.

Algèbricamente esta importante propriedade traduz-se pela igualdade:

$$\left\{ a\infty^n \pm b\infty^p = a\infty^n \quad n > p \right.$$

b) *Análise combinatória*

Vamos distinguir dois tipos de análise combinatória, aquele em que os grupos combinatórios são constituídos por um número finito de elementos, e o que é formado por grupos combinatórios compostos de elementos em número infinito. De momento, vamos estudar, apenas, a análise combinatória referente ao primeiro dêstes grupos,

deixando, o estudo do outro, para mais adiante, e isto por razões, que, quando julgado oportuno, se explicará.

1 — *Arranjos de ordem finita*

Êste conceito, dos arranjos, na análise combinatória das quantidades finitas, foi definido do seguinte modo: dados n elementos, qualquer grupo, formado com k dêsses elementos constitue aquilo a que se chama um arranjo de ordem k. Nesta outra análise, êste conceito pautar-se-á por idêntica tabuleta, designando-se por arranjos de ordem k, de certos a ∞^n elementos dados, qualquer grupo formado com k dêsses elementos.

Teorema II — O número total dos arranjos de ordem k que se podem formar a partir de a ∞^n elementos, e que representaremos simbòlicamente por, $A^k_{a\infty^n}$, é igual a, $a^k \infty^{kn}$.

Demonstração: — O número de arranjos de a ∞^n elementos tomados um a um, $A^1_{a\infty^n}$, é, evidentemente, igual a, a ∞^n, por isso que cada arranjo é composto de um único elemento. Para, partindo dêstes elementos, podermos formar todos os arranjos de a ∞^n elementos tomados dois a dois, $A^2_{a\infty^n}$, necessário e suficiente se torna que, a cada arranjo de a ∞^n elementos tomados um a um, $A^1_{a\infty^n}$, juntemos, um por cada vez, todos os elementos que não figuram nesse arranjo, e que são, como sabemos, em número $(a\infty^n - 1)$. Temos, em conseqüência, que o número total dos arranjos de a ∞^n elementos tomados dois a dois é:

$$A^2_{a\infty^n} = a\infty^n (a\infty^n - 1)$$

Mas, em conformidade com uma propriedade demonstrada anteriormente, temos:

$$a\infty^n (a\infty^n - 1) = (a\infty^n)^2 = a^2 \infty^{2n}$$

e, portanto:

$$A^2_{a\infty^n} = a^2 \infty^{2n}$$

Aplicando, sucessivamente, a mesma seqüência de raciocínios somos, inexoràvelmente, conduzidos à expressão geral,

$$A^k_{a\infty^n} = a^k \infty^{kn}$$

em conseqüência das igualdades,

$$\begin{array}{lll} a^2 \infty^{2n} & (a\infty^n - 2) & = a^3 \infty^{3n} \\ a^3 \infty^{3n} & (a\infty^n - 3) & = a^4 \infty^{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a^{(k-1)} \infty^{(k-1)} & (a\infty^n - k + 1) & = a^k \infty^{kn} \end{array}$$

ficando demonstrado o que nos propunhamos.

Cabe aqui, fazer reparo, que teríamos chegado à mesma expressão, se, em vez dos arranjos sem repetição, tivéssemos procurado o valor dos arranjos com repetição dos mesmos elementos tomados k a k. A razão desta anomalia, que, como vamos ver, é apenas aparente, reside no facto, do grupo formado por todos os possíveis arranjos com elementos repetidos, constituir um número infinito de ordem inferior, relativamente ao número total dos arranjos e, conseqüentemente, o valor dêste último não é alterado quando lhe somamos, ou subtraímos o primeiro.

2 — *Combinações de ordem finita*

As combinações, como sabemos, distinguem-se, na análise combinatória das quantidades finitas, dos arranjos, pela circunstância dos elementos, que compõem os grupos combinatórios figurarem obrigatòriamente, numa ordem de sucessão determinada prèviamente, e sempre a mesma para todos os grupos. Aqui, nesta nova análise, conservaremos a mesma distinção, e, portanto, da própria definição, resulta, que cada combinação de ordem k dá origem a a $k!$ arranjos da mesma ordem e, resulta daí, que, se representarmos o número de combinações de a ∞^n elementos tomados k a k por, $C^k_{a\infty^n}$, temos que:

$$C^k_{a\infty^n} = \frac{A^k_{a\infty^n}}{k!} = \frac{a^k \infty^{kn}}{k!} = \frac{a^k}{k!} \infty^{kn}$$

Observe-se que tal qual sucede com os arranjos, e pela mesma razão, teríamos chegado à mesma expressão se, em vez das combinações sem repetição, tivéssemos procurado o número de combinações com repetição de ordem k dos mesmos elementos.

(Continua)

FISCALIZAÇÃO DAS OBRAS PÚBLICAS

(Continuação) PELO ENG.º CIVIL (U. P.) **HORÁCIO DE MOURA**

III — Materiais auxiliares

1 — *Materiais betuminosos e asfálticos*

a) *Betumes* — Thénard diz que os betumes são corpos líquidos ou sólidos que fundem a baixa temperatura quando aquecidos, de cheiro forte, ardendo fàcilmente e deixando um resíduo fácil de calcinar. Descloizeaux define betumes como sendo corpos líquidos ou sólidos de composição imprecisa, que resultam geralmente da mistura de diferentes hidrocarbonetos em proporções diversas. Classifica-os em 3 categorias: betumes líquidos (óleo de nafta, petróleo, óleo mineral), betumes viscosos (pês mineral, alcatrão mineral) e finalmente asfaltos ou betumes sólidos. Narcy, diz que os betumes são rochas combustíveis compostas principalmente por hidrocarbonetos, unidos, em certos casos, ao azoto, oxigénio, enxôfre, etc., possuídos de grande fuzibilidade, espalhando no estado líquido um cheiro «sui generis», miscíveis entre si em certas condições, solúveis no sulfureto de carbono, no éter, essência de terebentina, etc., tanto menos solúveis no alcool quanto mais se aproximam do estado sólido e insolúveis na lexívia de potassa.

Finalmente, segundo Boussingault, o betume compacto é constituído por uma mistura de duas substâncias, a *petrolena* e *asfaltena,* resultando a segunda da oxidação da primeira. A petrolena (C^{20} H^{32}) isolada do betume de Pechelbronn, sêca e rectificada, é um líquido oleoso, ligeiramente amarelo, de cheiro betuminoso e de densidade igual a 0,891 (a 21°). A asfaltena, obtida pela volatização da petrolena a 250° mantendo esta temperatura durante 48 horas, é uma substância sólida, negra, brilhante, que se torna elástica a 300° e se decompõe antes de fundir; é solúvel no alcool e arde como uma resina. A sua fórmula, segundo Boussingault, é C^{20} H^{32} O^{3}. A maltena. é solúvel na nafta e a asfaltena, insolúvel na nafta e solúvel no tetracloreto de carbono.

Um bom betume apresenta uma côr brilhante com reflexos avermelhados; abaixo de 10° é sólido e à temperatura de 10° é quebradiço, apresentando uma fractura conchoidal. De 10 a 20° adquire uma certa elasticidade e entre 30 e 50° passa ao estado pastoso, para acima de 50° se liquefazer.

A maior parte dos betumes dissolvem-se quási inteiramente no éter, benzina, sulfureto de carbono e essência de terebentina.

O betume sólido, conhecido também por betume da Judeia encontra-se na natureza no estado livre, associado a matérias terrosas ou impregnando rochas permeáveis (calcáreos, arenites, etc.). A sua extracção pode fazer-se por diversos processos, segundo o grau de compacidade e permeabilidade da rocha a que está associado; se as rochas que impregna são brandas e permeáveis, basta fragmentar as pedras em pequenos pedaços, metê-las num recipiente com água a ferver, agitando o líquido durante algum tempo.

O betume funde pela acção do calor, abandonando a pedra cujos poros enchia, que vai para o fundo, sobrenadando o betume. Se as rochas são compactas, britam-se e submetem-se a altas temperaturas em fornos apropriados, onde circula ar quente.

Encontramos jazigos de betume na Suíça (Val de Travero), Espanha, (Vitória), França (Pirimont e Seyssel), etc., além dos clássicos jazigos do Mar Morto (lago de asfalto), na Palestina e da Ilha da Trindade, onde existe um lago de betume que cobre 50 hectares.

Em Portugal encontra-se calcáreo betuminoso perto da Marinha Grande (Canto de Azéche), e nas proximidades de Tôrres Vedras (Serra do Cabaço).

Com base nos betumes preparam-se variadíssimos hidrófugos, cuja composição varia conforme os materiais a proteger (ferro, madeira, pedra, etc.)

b) *Asfaltos* — O asfalto ou calcáreo betuminoso é uma rocha incluída no último andar do jurássico.

No estado de maior pureza é formado por carbono, oxigénio, azote e hidrogénio. A sua densidade fica compreendida, segundo ensaios de M. Malette, entre 2,0 e 2,4. O mineral é considerado de boa qualidade, quando não encerra senão carbonato de cálcio e betume; quando tem uma aparência homogénea, sem interposição de grãos brancos de calcáreo ou focos de betume livre; quando tenha entre 7 e 15 % de betume, seja desprovido de óleos voláteis e uma cozedura de 6 horas não lhe faça perder mais do que 2 % do seu pêso.

A rocha asfáltica tem uma côr pardo-escura, variável com a percentagem de betume; de notar é que a rocha se descora quando em contacto com o ar, visto que se dá a evaporação do betume superficial. A rocha é, em certos jazigos, inodora, tendo noutros um cheiro a petróleo. A sua extracção faz-se, em geral, a fogo, a céu aberto ou por galerias, conforme a profundidade a que se encontre. O mineral é partido à marreta, em primeiro lugar e a seguir britado em máquinas trituradoras e finamente moído, por fim, em moinhos especiais. O pó fino que se obtém chama-se farinha de asfalto e vende-se em sacos de 50 kg. Encontra-se à venda um produto designado pães de asfalto, que se obtém aquecendo a farinha em caldeiras e remexendo fortemente, enquanto se lhe junta betume puro, de modo que a massa fique a conter cêrca de 20 % daquele produto; o asfalto, liquifeito, verte-se em moldes de madeira ou ferro, assim se obtendo pães de asfalto, que apresentam uma superfície negra, reluzente e um pêso de cêrca de 25 kg.

Encontra-se também no mercado um produto chamado lava metálica, que é obtido por mistura de pedra pulverizada com alcatrão de hulha. Êste produto diferencia-se, contudo, dos pães de asfalto porque, aquecido, produz um fumo amarelado em vez do fumo esbranquiçado, característica da combustão dos pães de asfalto. Há ainda a notar que as pedras de asfalto natural contendo incrustações de enxôfre, dão também, por combustão, uma chama amarelada; contudo os vapores produzidos descobrem a presença do enxôfre. As rochas de asfalto que contenham enxôfre são disputadas pelos industriais visto que o enxôfre, ao arrefecer, depois de ter estado em fusão a elevada temperatura, toma uma textura cristalina que dá ao asfalto a elasticidade precisa. Os trabalhos executados com qualquer dos tipos de asfalto e que estejam a céu aberto, devem ser protegidos com terra argilosa ou outro produto análogo, para que não sofram baixas bruscas de temperatura, que produziriam fendas na sua massa.

O asfalto aplica-se na construção, no isolamento de paredes contra a umidade, na pavimentação de ruas, revestimento de pavimentos de armazéns, revestimentos de terraços, sobreleito de fundações, etc., etc. Para aplicar a camada de asfalto em pavimentações é necessário que a superfície a revestir se apresente como uma massa plana e resistente, geralmente constituída por uma camada de betão hidráulico, cuja espessura varia conforme as necessidades; o asfalto sòmente se aplica quando o betão está completamente sêco. Os pães de asfalto britam-se, como já disse, e fundem-se num recipiente onde se lhe junta, durante a fusão, 4 a 5 % de betume puro. Logo que tudo esteja líquido adiciona-se, pouco a pouco, areia bem lavada e sêca ou areia siliciosa, em proporções convenientes, agitando sempre, até obter uma massa perfeitamente homogénea.

A aplicação do asfalto é feita em todos os casos, muito quente, comprimindo-o e adaptando-o à fundação, até que tenha a espessura requerida; por fim, sôbre a camada de asfalto ainda quente, espalha-se e apiloa-se areia fina. Em muitas pavimentações se recorre também aos *asfaltos comprimidos*. Estes obtêm-se aquecendo até à temperatura de 120° C, a rocha triturada, de modo a que resulte um produto pulverulento. O pó de asfalto estende-se sôbre a fundação do pavimento a revestir, fundação

executada como no caso anterior com betão hidráulico, com ela se aglomerando, por compressão, executada por pilões e cilindros de ferro, quentes; corre-se depois a superfície com alisadores que, prèviamente, se levam a alta temperatura, afim de provocar a fusão do betume e assim se obter o pavimento com perfeita impermeabilidade. Com êste mesmo material se fabricam tejoletes de asfalto, que servem também para pavimentação. Estes tejoletes são rectangulares ou quadrados e apresentam estrias à superfície; fabricam-se com prensas especiais, apresentam grande compacidade e resistência aos agentes atmosféricos, pequeno desgaste e perfeita impermeabilidade. A sua espessura oscila entre 2 e 6 cm, variando as outras dimensões (25×25 cm são as mais vulgares). Algumas vezes aparece um produto — asfalto fictício — que é uma mistura de calcário, terra argilosa e betume, submetida a cozedura. Êste asfalto fictício não apresenta as mesmas propriedades do asfalto natural e mesmo o seu preço é mais baixo do que o dêste. O asfalto fictício conhece-se pelo cheiro que desprende quando aquecido e pelas fendas e degradações rápidas que se produzem ulteriormente ao seu emprêgo, que provêm da ausência de óleos.

2 — *Alcatrões.*

O alcatrão é um líquido insolúvel na água, denso, mais ou menos còrado, muitas vezes negro, viscoso, de cheiro forte, resultante da destilação, ao abrigo do ar, dos diversos combustíveis naturais; a sua natureza depende dos combustíveis que se utilizem e para cada um dêles, da temperatura a que se efectuou a destilação, da sua demora e da forma do aparelho destilatório.

Os principais alcatrões são:

O alcatrão da hulha
O alcatrão do linhito
O alcatrão da turfa
O alcatrão da madeira

tomando cada qual, como se vê, o nome do produto que lhe dá origem.

a) *Alcatrão da hulha.* — O alcatrão da hulha é constituído, essencialmente, por hidrocarbonetos da série gorda, sempre que a sua densidade seja inferior à unidade; e é constituído, principalmente, por hidrocarbonetos da série aromática, quando aquela densidade seja superior à unidade. É negro, e por conter ácido fénico, presta-se para o fabrico de tôda a classe de vernizes e impregnações protectoras. Pràticamente, o alcatrão da hulha é obtido nas fábricas de gás de iluminação, na recuperação de produtos voláteis dos altos fornos ou, finalmente, na produção do gás de gasogénio e do gás de água.

Variadíssimos corpos entram na composição do alcatrão da hulha, que nêle se encontram em variadíssimas proporções.

Os principais são:

— a água
— gases dissolvidos, análogos aos que constituem o gás de iluminação
— alcatrão pròpriamente dito.

Êste último elemento contém:

— hidrocarbonetos da série gorda e da série naftalénica
— hidrocarbonetos aromáticos
— corpos gordos neutros
— ácidos e fenóis
— bases.

As proporções dêstes elementos são variáveis com a natureza da hulha e com a temperatura de recolha do alcatrão.

O breu, é o resíduo da destilação do alcatrão da hulha; um alcatrão normal fornece cêrca de 55 % de breu. O breu diz-se *gordo* quando a destilação se faz a 270°. Sendo então mole e plástico à temperatura ordinária e apresentando uma côr mate, preta; a sua densidade fica compreendida, entre 1,20 e 1,23.

O breu diz-se *sêco* quando a destilação se faz a 120°; é então sólido e quebradiço à temperatura ordinária e a sua fractura é negra e brilhante; funde entre 150° e 200°, ficando a sua densidade, compreendida entre 1,27 e 1,30. Para o fabrico do asfalto fictício,

usa-se o breu gordo, empregando-se o sêco, na fabricação de aglomerados.

b) *Alcatrão do linhito e alcatrão da turfa.* Estes materiais dão, por destilação, gases não condensáveis, alcatrão, água de condensação e coque. Os gases são utilizados para aquecimento e produção de fôrça motriz; o alcatrão, que é a parte mais importante da destilação, redestila-se, dando óleos ricos em parafina e deixando como resíduo final, o coque Arrefecendo os óleos de parafina e apertando a massa sólida obtida entre os pratos duma prensa hidráulica, obtém-se a parafina; entre os subprodutos que podem resultar, citaremos o creosote bruto, óleos de creosote, bases pirídicas, etc.

A água de condensação não tem valor comercial e finalmente, o coque, é empregado como combustível.

Acabamos de dizer que o alcatrão é o principal produto resultante da destilação do linhito; êste produto, à temperatura ordinária, é plástico e aquecido torna-se fluído.

De côr pardo-escura, o seu cheiro faz lembrar o do enxôfre; na sua constituïção predominam hidrocarbonetos saturados.

O alcatrão de linhito contém pequena quantidade de fenol, naftalina, aldeídos, etc. A sua densidade é cêrca de 0,85.

A destilação da turfa produz o alcatrão da turfa na proporção de 4 °/₀. Êste alcatrão tem uma composição química análoga à dos alcatrões do linhito mas com proporções diferentes.

c) *O alcatrão da madeira.* O alcatrão da madeira obtém-se, como produto principal, na destilação sêca da madeira e como subproduto, na fabricação do ácido pirolenhoso, na do gás de iluminação e na do carvão de madeira.

A sua composição química varia com a natureza das madeiras de que se trate, bem como com o processo de fabrico, sendo a percentagem normal de alcatrão, cêrca de 7 a 10 °/₀.

Há que distinguir o alcatrão de destilação, do alcatrão de carbonização. O primeiro, é negro, de cheiro semelhante ao do alcatrão da hulha, contendo naftalina, sendo fusível o seu resíduo de destilação e apresentando-se quási líquido. O segundo, não é tão escuro e é xaroposo; de cheiro menos acre, contém parafina e o seu resíduo da destilação é plástico.

O alcatrão do carvalho contém, essencialmente, ácido pirolenhoso, creosote, hidrocarbonetos da série benzénica e naftalénica. Quási tôdas as espécies de alcatrão da madeira, sobretudo o das coníferas, se usam para embeber cordas, barrar a querena dos navios, proteger as adufas, revestir pavimentos, etc., e, duma maneira geral, para impregnar a madeira, com vista à sua conservação; o seu emprêgo faz-se sempre a quente.

3 — *Cimento de madeira (Holzzement)*

Conhecido, impròpriamente, por êste nome, porque é aplicado algumas vezes na impermeabilização de recipientes e outras obras de madeira. A sua composição é:

60 partes de alcatrão de hulha
25 de enxôfre
15 de asfalto

formando uma massa escura espêssa e pegajosa.

Com ela pode-se impregnar papel forte que por sua vez é usado, especialmente na Alemanha, para revestir coberturas de madeira.

Entre nós êste produto, pelo menos que eu tenha conhecimento, não se usa.

4) *Cartão alcatroado e cartão asfaltado; fêltro asfaltado* — Fabrica-se o cartão alcatroado impregnando cartão de trapos, a quente, com alcatrão da hulha, redestilado, para que assim se possa garantir que o material não será quebradiço nem endurecerá. O cartão depois de impregnado faz-se seguir para depósitos cheios de alcatrão quente que têm nas extremidades cilindros sob os quais êle passa, ficando assim sem o excesso daquele produto e tornando-se de superfície mais compacta; por último, polvilha-se com areia. Quando o material é de boa qualidade, apresenta a superfície per-

feitamente impregnada de alcatrão, não absorve nenhuma água durante 24 horas de imersão, desenrola-se, quando o aquecemos, com grande facilidade e não apresenta qualquer fenda. Vende-se o cartão alcatroado em rolos de 20 m de comprimento, 1 m de largura, pesando em regra 3 kg/m^2. Costuma também aparecer no mercado um produto de fabricação espanhola, com 3 espessuras, I, II e III, que pesa respectivamente 2,6, 2,666 e 3,333 kg/m^2.

5 — *Amianto*

É um mineral fibroso que se compõe, essencialmente, de silicato de magnésio hidratado. A sua fibra mineral é produzida pela decomposição da horneblenda.

Emprega-se pelo seu grande poder isolante do calor e da electricidade e pela sua resistência, também grande, aos ácidos e ao fogo. Explora-se a céu aberto com um aproveitamento de fibras utilizáveis de 2 a 4 %.

São produtores dêste mineral, principalmente, o Canadá, a Rússia, a China e a Itália. As principais classes de amianto são: *amianto serpentina-crisotil,* com as seguintes características:

Silicato de magnésio quási puro com cêrca de 4 % de ferro e cal; de fibra normal ao filão, muita fina, elástica e densa. O seu comprimento máximo é de cêrca de 3 cm e é muito resistente ao calor.

Pêso específico 2,3 a 2,5 kg/dm^3; conteúdo de água 15 %; temperatura de amolecimento 1500°; conductibilidade eléctrica entre $0{,}53.10^{-5}$ e $0{,}35.10^{-6}$ cm^3/Ω.

O anfíbol-amianto horneblêndico, que encerra um elevado conteúdo de alumina (cêrca de 10 %) e com uma percentagem, também grande, de ferro e cal (cêrca de 18 %).

A sua fibra é longa (chega por vezes a ter algnns metros) e é menos resistente ao fogo do que o da classe anterior.

O seu conteúdo de água é, normalmente, maior do que no amianto serpentina (entre 2 e 5 %), apresentando também, como diferença desta última classe, a fibra bastante quebradiça. A preparação das fibras de amianto faz-se triturando, em primeiro lugar, as pedras, em moinhos, para que depois aquelas se possam separar da rocha matriz; a seguir, juntas com fibras de algodão (cêrca de 10 %), levam-se à carda.

Os tecidos de amianto, que são análogos aos tecidos de algodão, são executados em teares especiais.

O amianto também pode aparecer em fôlhas afeltradas, providas de alma metálica, sempre que tenham que ser submetidas a certos esforços de flexão. O amianto moído e misturado com vidro solúvel ou cola, dá, por laminação, uma espécie de placas que também podem prover-se, como as anteriores, de alma metálica O amianto utiliza-se como protector contra o fogo e para tôda a espécie de isolamentos. As fibras de amianto preparam-se, freqüentemente, com cimento, misturando-se com êste material e depois comprimindo-se em finas camadas; as fôlhas que assim se obtêm e que fazem lembrar as do papel, submetem-se a grandes pressões, formando-se placas utilizadas nos mais variados misteres.

No nosso País fabricam-se placas de cimento e amianto com a designação de luzalite, de que já se falou ao tratarmos de pedras artificiais, no capítulo I, do presente estudo (fibro-cimento).

6 — *Pinturas*

Nas pinturas encontramos matérias corantes, que na maior parte das vezes são constituídas por côres minerais, e produtos que lhe servem de veículo no emprêgo — os óleos secativos e essências.

Assim, passaremos a analisar, embora sumàriamente, os diversos elementos aqui integrados.

A — Côres

As diferentes côres que entram nas pinturas são constituídas por compostos minerais, por matérias orgânicas ou ainda pela mistura de substâncias que pertencem às duas categorias atrás citadas. Em qualquer dos casos, estes compostos podem ter a sua origem na natureza, côres naturais, ou serem preparados artificialmente, côres artificiais. Os compostos minerais empregados como

côres, são, geralmente óxidos, carbonatos, sulfatos, sulfuretos, etc., muitas vezes com base nos metais pesados ou alcalino terrosos.

Os compostos orgânicos ou são extraídos do reino vegetal ou são fabricados por via sintética; aparecem no mercado com a designação geral de lacas ou côres lacadas, depois de sofrerem combinações com metais ou sais metálicos.

a) *Côres brancas*

Branco de chumbo (alvaiade) — Esta côr também é conhecida por branco de prata, de neve, de Veneza, de Hamburgo, de Clichy, etc. A fórmula química do produto que possue melhor poder cobridor é

$$2\ CO^3\ Pb + Pb\ (OH)^2$$

encerrando 11,36 % de CO^2, 2,33 % de H^2O e 86,31 % de Pb O.

Êste produto, na prática, difere bastante das proporções indicadas e verificamos, principalmente nas côres que se obtêm por precipitação, que se aproxima da fórmula CO^3Pb.

O pêso específico do branco de chumbo é de 6,47. Dissolve-se no ácido azótico quente, desprendendo-se anidrido carbónico; neutralizado pela soda, acidificado pelo ácido azótico e posta a solução resultante sob a acção duma corrente de hidrógénio sulfurado, resulta finalmente um precipitado negro. Servem para a falsificação dêste produto, as seguinte substâncias:

sulfato de bário
carbonato de bário
sulfato de cálcio
carbonato de cálcio
argila.

O branco de chumbo deve ser branco puro, estável à luz e de grande poder cobridor; a sua perda ao fogo pode ir até 14 % e o seu teor em carbonato de 68 a 75 %. Requer 10 a 12 % de óleo, secando ràpidamente. Quando o produto contém impurezas, enegrece ao ar. Diremos finalmente que, por esta côr ser extremamente tóxica, o seu uso deverá ser interdito, a não ser quando o seu emprêgo seja feito sob as vistas de técnicos especializados.

b) *Branco de zinco* — Substituto do branco de chumbo, é também conhecido por branco de neve. A sua fórmula química é OZn e o seu pêso específico 5,7.

O teor de óxido de zinco deve ser de 99,5 a 99,8 %, não deverá ter mais de 0,05 a 0,1 % de chumbo e nunca ácido sulfúrico. Dissolve-se no ácido clorídico sem desprendimentos gazosos; neutralizado, a seguir, o líquido, pela soda e acidificado depois pelo ácido acético dá, com uma corrente de hidrogénio sulfurado, um precipitado branco de sulfureto de zinco. Servem para falsificar êste produto as seguintes substâncias:

— sulfato de cálcio
— carbonato de cálcio
— sulfato de bário
— sulfato de zinco
— branco de chumbo.

O branco de zinco tem um poder cobridor menor que o branco de chumbo (três camadas de branco de chumbo, cobrem tanto como quatro camadas de branco de zinco) e é menos resistente às intempéries; mas o branco de zinco apresenta sôbre o de chumbo, uma estabilidade perfeita às emanações sulfurosas, posto que seja duma brancura completa.

Quando alguns autores dizem que o branco de zinco cobre melhor que o branco de chumbo, exprimem a sua confusão no significado técnico da palavra *cobrir;* o que querem dizer, é que um determinado pêso de branco de zinco permite pintar uma superfície maior que o mesmo pêso de branco de chumbo. Mas isto é questão diferente.

O seu teor em água não ultrapassa, geralmente, 3 %, requerendo 20 % de óleo. Êste produto, um pó brando e leve, deverá conservar-se sempre em locais bem secos.

c) *Sulfureto de zinco.* Côr «dum branco muito puro e poder cobridor considerável, superior mesmo aos dos brancos de chumbo e zinco, não enegrecendo sob emanações sulfurosas, sem acção sôbre os metais e completamente inofensiva» (1).

(1) «Ch. Coffignier», revista de química industrial.

O zinco poderá dar duas espécies de sais solúveis:

Sais em que desempenha o papel de base e compostos nos quais tem o papel dum ácido. Os sais solúveis empregados são:

O sulfato de zinco (SO^4Zn) e o cloreto de zinco (Cl^2Zn) que são da primeira categoria; o zincato de amoníaco $\left(Zn < \begin{matrix} ONH^4 \\ ONH^4 \end{matrix}\right)$ e o zincato de sódio $\left(Zn < \begin{matrix} ONa \\ ONa \end{matrix}\right)$, que pertencem à segunda.

As equações de formação poderão escrever-se:

1.ª categoria:

$$SO^4Zn + SNa^2 + H^2O \rightarrow ZnS, H^2O + SO^4Na^2$$

2.ª categoria:

$$Zn < \begin{matrix} ONa \\ ONa \end{matrix} + SNa^2 + 3H^2O \rightarrow ZnS, H^2O + \\ + 4Na\,(OH)$$

O sulfureto de zinco é um pó muito fino, untuoso, dum branco brilhante. O produto comercial contém, muitas vezes, óxido de zinco e sais solúveis; contudo a sua composição corresponde, sensìvelmente, à fórmula $4ZnS, H^2O$.

Como já referimos, cobre tanto ou mais que o branco de chumbo, exerce também uma acção secativa sôbre as pinturas, é inalterável ao ar e às emanações sulfurosas. Em relação ao branco de zinco, mostra-se de maior poder cobridor, sendo mais secativo. Porque é um sulfureto, evitar-se-á misturá-lo com côres sensíveis ao enxôfre. Em virtude do seu preço elevado, emprega-se geralmente, como veremos, misturado com o sulfureto de bário (litopone).

d) Litopone. Produto que se obtém precipitando-se uma solução de sulfato de zinco pelo sulfureto de bário.

Nas marcas mais caras, ao sulfato de zinco adiciona-se cloreto de zinco; nas mais baratas, sulfato de sódio.

As diferentes proporções dêste produto a pôr em presença, variam consoante a qualidade do litopone que se pretende obter, sendo, comercialmente, o produto tanto mais caro, quanto maior percentagem de sulfureto de zinco contiver. A reacção

$$SO^4Zn + BaS \rightarrow ZnS + SO^4Ba$$

corresponde a um produto que contém cêrca de 30 % de ZnS; e $ZnSO^4 + ZnCl^2 + 2BaS \rightarrow 2ZnS + BaSO^4 + BaCl^2$ corresponde a um litopone que contém a percentagem de cêrca de 45 % de sulfureto de zinco.

Para obter produtos com menor percentagem, usam-se o sulfato de zinco, sulfato de sódio, cloreto de bário e sulfureto de bário.

$$3ZnSO^4 + 4Na^2SO^4 + 3BaS + 4BaCl^2 \rightarrow \\ ZnS + 7BaSO^4 + 8NaCl$$

Pelo exposto se verifica que os diversos produtos desta categoria se diferenciam pelas percentagens de Zn, além da diferenciação pelo aspecto e grau de brancura.

O litopone é um pó branco, muito fino e estável às emanações sulfurosas. O seu poder cobridor não é de desprezar, posto que a sua resistência aos agentes atmosféricos seja menor que a do branco de zinco.

Tem o defeito de tomar uma coloração acinzentada sob a influência da luz solar; por isso e mais porque a sua resistência não é notável, esta côr é quási exclusivamente empregada em interiores.

e) *Branco de barita.* Esta côr, é obtida por dois processos: moendo o sulfato de barita natural ou precipitando um sal de bário por um sulfato alcalino, resultando assim dois produtos distintos:

— O sulfato de barita natural, de densidade que varia entre 4,3 e 4,7, de fraco poder cobridor e relativo valor em pinturas a óleo.

— O sulfato de barita artificial, ou branco fixo, preparado por dupla decomposição, por meio dum sal de bário solúvel e dum sulfato alcalino (são utilizados, geralmente, o cloreto de bário e o sulfato de sódio calcinado):

$$BaCl^2 + SO^4Na^2 \rightarrow 2\,NaCl + SO^4Ba$$

é um pó finíssimo, de poder cobridor muito maior que o do sulfato de barita natural, completamente amorfo, o que não acontece com o sulfato de barita natural. Aparece-nos como sub-produto em certas indústrias, por exemplo, no fabrico de água oxigenada por meio do bióxido de bário. É um produto completamente inofensivo, absolutamente inalterável e muito empregue no fabrico das lacas, na indústria de papéis pintados, cartões, etc.

f) *Branco mineral.* Sulfato de cal hidratado ($SO^4Ca, 2H^2O$).

g) *Branco de Espanha.* Mais conhecido por cré (CO^3Ca).

É uma côr muito empregada na pintura a têmpera ou à cola; tem um excelente poder cobridor. Não é empregado na pintura a óleo.

h) *Leite de cal* — Cal apagada diluída em água.

i) *Caolino* — Silicato de alumina natural, freqüentemente enpregado no fabrico da porcelana; é branco e untuoso.

j) *Talco* — Silicato de magnésio hidratado natural, que possue uma aderência, um brilho e uma untuosidade notáveis.

l) *Branco de sílica* — Sílica anidra, produzida por calcinação de certas variedades de sílica hidratada, lançando-se, ao rubro, em água fria, onde se pulveriza pela contracção molecular, muito intensa, que sofre. É empregada como sucedâneo do sulfato de barita em certas lacas. O branco de sílica é absolutamente inalterável.

B — Côres Verdes

a) *Verde de Schweinfurth* — Também conhecido por verde de Viena, de Leipzig, de Paris, verde imperial ou verde royal. Quìmicamente, é o aceto-arsenito de cobre.

$$\left.\begin{array}{l} CH_3 - CO - O \\ CH_3 - CO - O \end{array}\right> Cu, 3\,Cu\,As\,O$$

Trata-se duma côr vivíssima, muito resistente ao calor e à luz, porém extremamente venenosa e por isso de emprêgo perigoso.

Pode-se falsificar com adições de:

— argila
— sulfato de bário
— » » chumbo
— amarelo de zinco
— » » crómio
— gêsso.

Quando puro dissolve-se inteiramente no amoníaco e nos ácidos. Aquecido num tubo de ensaio, desenvolve um cheiro característico; a sua côr é tanto mais clara quanto maior fôr a sua percentagem de arsénico.

b) *Verde de Scheele* — Arsenito mais ou menos básico de cobre AsO^3CuH ou $(AsO^3)^2Cu^2$. É muito venenoso.

c) *Verde montanha ou malaquite* — Quìmicamente é o carbonato básico de cobre. CO^3Cu, $Cu(OH)^2$; de côr verde esmeralda, muito empregado em pintura artística.

d) *Verde Neuwied* — Que é uma mistura de verde Schweinfurth, já citado, de branco fixo, também já citado, de sulfato de bário natural e de gêsso.

e) *Verde Mitis* — Também conhecido por verde de Viena ou verde Kirchberger. Arseniato de cobre obtido por dupla decomposição entre uma dissolução de sulfato de cobre e uma outra de arseniato alcalino. É uma variedade dêste verde, o verde Paul Véronèse, muito aplicado em pintura artística.

f) *Verde de Óxido de Crómio* — Sexquióxido de crómio (Cr^2O^3), que se obtém ou calcinando o cromato de amónio ou de mercúrio, ou ainda reduzindo um bicromato ou cromato alcalino.

g) *Verde Casselli* — Oxido de crómio, puro. Obtém-se calcinando uma mistura de bicromato de potássio e sulfato de cálcio

$$2Cr^2O^7K^2 + 2SO^4Ca \rightarrow 2SO^4K^2 + 2CaO + 3O^2 + 2Cr^2O^3.$$

Do produto que resulta da calcinação separa-se a cal, tratando-o pelo ácido clorídrico, eliminando, a seguir, os sais solúveis, com uma lavagem com água.

h) *Verde Guignet* — Também conhecido por verde sólido, permanente, ou verde esmeralda; hidrato do sesquióxido de cró-

mio que se obtém a partir do bicromato de potássio e ácido bórico (1 : 3).

As equações de formação seriam:

$$Cr^2O^7K^2 + I6Bo\,(OH^3) \rightarrow (Bo^4O^7)^3\,Cr^2 + \\ + Bo^4O^7K^2 + 24OH^2 + 3O$$

$$(Bo^4O^7)^3\,Cr^2 + 2o\,H^2O \rightarrow 12\,Bo\,(OH)^3 + \\ + 2Cr^2O^3,\,2H^2O$$

O verde Guignet é vivo, completamente inofensivo, inalterável e a sua tonalidade não varia com a luz artificial; o seu poder cobridor sendo fraco, é, apesar disso, muito empregado tanto em tintas a óleo como a água.

i) *Verdete* — Quìmicamente, é um acetato de cobre mais ou menos básico, que se obtém tratando, em contacto com o ar, o cobre pelo ácido acético.

Esta côr é pouco sólida e bastante venenosa.

j) *Verde Casselmann* — Quìmicamente, é o sulfato básico de cobre. Pode obter-se precipitando uma dissolução de sulfato de cobre por outra de acetato de sódio.

l) *Verde Dingler*. Também conhecido por verde Mathieu-Plessy, verde Schnitzer ou verde de cromo. Quìmicamente, trata-se de fosfato de crómio + fosfato de cálcio.

m) *Verde Arnaudon*. Metafosfato de crómio, obtido pela acção do fosfato de amoníaco sôbre o bicromato de potássio.

n) *Verde Cobalto*. Também conhecido por verde de zinco ou verde de Rinmann. Quìmicamente é considerado uma mistura de zincato e óxido de cobalto, contendo 70 a 80 % de óxido de zinco e de 12 a 20 % de óxido de cobalto. É pouco alterável, de belo aspecto e não é venenoso. O seu preço é contudo elevado.

o) *Verde de Verona*. Silicato de ferro + + argila, etc.; côr relativamente sólida e barata.

p) *Verde Ultramar*. Silicatos de alumínio + polisulfuretos.

q) *Verde Inglês*. E uma mistura de amarelo de crómio e azul da Prússia. Bastante fraco sob a acção da luz, o seu poder cobridor é satisfatório relativamente ao seu baixo preço.

Além destas côres verdes há tôda a série obtida pela junção das côres azuis com as amarelas e as lacas verdes.

C — Côres Vermelhas

a) *Mínio*. Combinação de bióxido de chumbo (PbO^2) e protóxido do mesmo metal (PbO). Contém, teòricamente, 2 moléculas de protóxido para uma de bióxido e a sua fórmula é:

$$2\,PbO\,,\,PbO^2 \quad \text{ou} \quad Pb^3O^4$$

Contudo o produto, industrialmente, contém impurezas várias, como sais de cálcio, óxidos metálicos, matérias terrosas, etc. É um pó vermelho alaranjado, muito pesado (a sua densidade varia entre 8 e 9); cobre muito bem, mas tem o defeito dos sais de chumbo — muito venenoso e enegrece pelo hidrogénio sulfurado.

O produto quando de boa qualidade não conterá mais que 0,5 % de matérias insolúveis, a sua percentagem de peróxido fica compreendida entre 25 e 34,8 % e o consumo de óleo entre 10 e 15 %.

b) *Óxidos de ferro*. Côres conhecidas por: vermelho de Inglaterra, colcotar, vermelho da Prússia, vermelho de Paris, etc. Quìmicamente trata-se do óxido férrico anidro (Fe^2O^3). É um pó vermelho, duma grande estabilidade, não venenoso, muito empregue em pinturas a óleo, especialmente na pintura de construções metálicas. O mínio de ferro de boa qualidade, terá um pêso específico à beira de 4,2. As côres executadas com êste produto têm grande poder cobridor e são muito estáveis.

c) *Vermelhão*. Também conhecido por cinábrio, vermelho chinês, etc. É uma côr com base mercúrio, visto ser constituída por uma variedade de sulfureto de mercúrio (HgS).

O sulfureto vermelho de mercúrio, encontra-se, no estado natural, em massas compactas avermelhado-escuras conhecidas sob o nome genérico de cinábrio. Depois de britadas e reduzidas a pó muito fino, aviva-se a sua côr vermelha, passando-se a conhecer o produto pelo nome de vermelhão: Sintèti-

camente, obtém-se um produto com esta designação, apresentando ainda uma côr de maior realce.

Quando puro deve volatilizar-se completamente e qualquer resíduo indica uma impureza do produto; é insolúvel nos ácidos; Solúvel, contudo, no ácido clorídico bromado e água régia. O seu pêso específico é igual a 8,2.

Exige 15 a 25 % de óleo. É uma côr extremamente venenosa, cobre admiràvelmente, mas é duma solidez à luz bastante medíocre; as emanações sulfurosas fazem-na enegrecer.

d) *Vermelhão de antimónio.* Quìmicamente é esta côr constituída pelo trisulfureto de antimónio ($Sb^{v}S^{3}$), segundo uns, ou por um oxisulfureto, segundo outros.

É um pó vermelho carmim não venenoso e insensível às emanações sulfurosas. Não resiste à acção cáustica dos alcalis e é pouco resistente à acção da luz. É empregado em pintura a óleo; misturado com água, muda de tom.

e) *Ocres vermelhos; mínio de ferro.* Damos o nome genérico de *ocres*, às argilas coradas pelo óxido de ferro.

Têm a côr amarelada quando encerram hidrato férrico, mas resultarão avermelhadas se as calcinarmos; de facto, o hidrato férrico, amarelo, perde a sua água e transforma-se em óxido férrico, vermelho. Agora poderemos dizer que sob o nome de mínio de ferro se designa o produto obtido por calcinação duma argila ferroginosa, ou por calcinação de outros ocres.

(Continua)

BIBLIOGRAFIA

Brewster — This Puzzling Flanet — 35$00.

R. Rodés — Prontuário Metalotécnico — 90$00.

J. Camón — Contadores de corriente alterna — 108$00.

F. Gollins — The Amateur Machinist — 35$00.

C. Morgan — Estructuras contínuas de Hormigón Armado — 294$00.

C. Morgan Modern Oil Engine Practice — 231$00.

J. G. Diaz — Curso de Matemática em forma de problemas — 180$00.

M. Tuot — Contribution a l'Étude de la Condensation Organomagnésienne des Composés Oxycarbonés-Aliphatiques — 45$00.

Roulleau - Un Nouveau Sensitomètre a Diaphragmes d'Ouverture — 30$00.

Douvillé — Identification de Soursges Lumineuses Destinées aux Épreuves de l'Effet de Vieillissement du a la Lumière — 20$00.

Te-Lou — Étude des caractères Généraux de l'Allumage par Effluves — 12$00.

Vernotte — Au Sujet du Refroidissement Forcé des Moteurs d'Avion — 25$00.

Brandicourt — Hypersensibilisation d'Émulsions Photographiques par les Vapeurs de Mercure — 20$00.

E. Brun — Contribution Technique a l'Étude des Accumulateurs Soumis aux Grands Froids — 15$00.

Sackmann — Expériences sur l'Écoulement de l'Air Autour de Maquettes d'Aile ou d'Avions Étudié par Procédé de Visualisation — 25$00.

E. Brun - Mesure de la Pression sur un Corps en Rotation Rapide et Aplications — 20$00.

Soler — Aire Comprimido — 110$00.

A. Mercier — Leçons et Problèmes sur la Théorie des corps Déformables — 84$00.

L. Bendel — Les éléments de la fabrication du béton — 42$00.

La création de possibilitée de travail — 33$50.

E. Poldini — La prospection Électrique du Sous-Sol — 28$00.

R. Spieser — Les Installations électriques — 42$00.

H. Lier — Le Chauffage et la Ventilation — 22$50.

H. Meier — Les Installations Sanitaires — 22$50.

Leuenberger — La Construction en temps de guerre — 42$00.

A. Sarrasin — Ponts récents en béton armé — 21$00.

Règlement Général pour la Protection Météorologique Internationale de l'Aéronautique — 22$50.

F. González — Radiorrecepción Actual — 90$00.

O. Perrigo — El torno Moderno y sus Aplicaciones — 125$00.

L. Curtman — Análisis Químico Cualitativo — 150$00

V. W. Page — Manual de Aviación — 108$00.

G. Mie — Tratado de Electricidade e Magnetismo — 210$00.

C. Chaussin — Chaleur et Thermodynamique — 96$00.

Barthelot — La Tourbe Exploitation et Conditionnement — 97$50.

J. Quinet — Théorie et Pratique des Amplificateurs — 241$50.

N. Larburu — El Trazado en el Talier de Caldereria — 375$00.

A. B. Wood — A Textbook of Sound — 231$00.

J. W. Strutt — The Theory of Sound, Vol. I — 115$50.

J. W. Strutt — The Theory of Sound, Vol. II — 115$50.

C. Brillouin — Les Tenseurs en Mécanique et en Élasticité — 156$00.

James Jeanss — The Mathemical Theorx of Electricity and Magnetism — 163$00.

R. Delaby — Analyse Qualitative Minérale — 101$00.

P. Lopaulle — Les Marchés de Construction Industrielle — 40$00.

Eduard Rhein — Du und die Elektrizität — 110$00.

R. Nadreau — Manuel Technique des Compagnons Tourneur et Fraiseur — 62$50.

A. Gutton — La Charte de l'Urbanisme — 77$50.

Augustin Rey — La Science des Plans de Villes — 377$00.

W. Darby — El Libro del Mecánico Práctico — 60$00.

J. Arana — Electrotecnia Industrial, 2 vols. — 210$00.

B. Swoops — Curso completo de Electricidad Practica — 105$00.

S. Taplas — Manual del Electricista — 90$00.

S. Grimshaw — El Moderno Constructor Mecanico — 120$00.

F. Stanley — Práctica Moderna de la Construcción Mecánica — 75$00.

F. Harang — Trigonométrie — 22$00.

J. Quinet — Théorie et Pratique des Amplificateurs — 341$50.

J. Rosich — Ventilacion Calefaccion y Acondicionamentos de los Ambientes — 45$00.

P. Fraga — Organización de la Producción y de la Distribución en Alta Tensión de las Redes Eléctricas — 90$00.

A. Garcia — Curso Prático de Matemáticas, 2 vols — 330$90.

PUBLICAÇÕES RECEBIDAS

Não periódicas

Anuário dos Serviços Hidráulicos — 1941 — Direcção Geral dos Serviços Hidráulicos e Eléctricos.

Relatório da Administração Geral do Pôrto de Lisboa — 1942.

Discurso de abertura do II Congresso da União Nacional — Edição do S. P. N.

O Ensino Técnico na Beira Baixa — «A Escola Industrial de Campos Melo», da Covilhã, pelo Eng.º Ernesto de Campos Melo e Castro.

As Comemorações do segundo centenário de Lavoisier — Academia de Ciências de Lisboa.

Publicações periódicas

ARGENTINA

LA INGENIERIA — Novembro de 1943.
EL INGENIERO — N.os 50 e 51.
BOLETIM DO INSTITUTO ARGENTINO DE RACIONALIZACIÓN DE MATERIALLES — Dez.º de 1943.

ESPANHA

CEMENTO — Abril e Maio de 1944.
DYNA — Maio de 1944.
REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS — Maio de 1944.

HUNGRIA

TECHNIKA — Maio de 1944.

PORTUGAL

A ARQUITECTURA PORTUGUESA E CERÂMICA E EDIFICAÇÃO — Março de 1944.
ANAIS DO CLUB MILITAR NAVAL — Março e Abril de 1943.
AGROS — Set.º-Out.º de 1943.
AGRONOMIA LUSITANA — N.º 3 — 1942.
BOLETIM DA JUNTA NACIONAL DE CORTIÇA — Maio de 1944.
BOLETIM DA SOCIEDADE GEOLÓGICA DE PORTUGAL — Vol. III, Fasc. III.
BOLETIM DA MOCIDADE PORTUGUESA — N.º 3 — 1944.
BROTÉRIA — Maio de 1944.
CLÍNICA, HIGIENE E HIDROLOGIA — Março de 1944.
ESTUDOS — N.os 1 e 2 — 1944
GAZETA DOS CAMINHOS DE FERRO — N.os 1353 e 1354.
INDÚSTRIA PORTUGUESA — Maio de 1944.
NEPTUNO — N.os 188 e 189.
OCIDENTE — Maio de 1944.
REVISTA DE ARTILHARIA — Abril de 1944.
REVISTA DA ORDEM DOS ENGENHEIROS — N.º 8 1944.
SEARA NOVA — N.º 878.

TÉCNICA

REVISTA DE ENGENHARIA, DOS ALUNOS DO I. S. T.

DIRECTOR: JOSÉ DE LUCENA
ADMINISTRADOR: FAUSTO GONÇALVES HENRIQUES
BIBLIOTECÁRIO: ANTÓNIO BUSTORFF
CORPO REDACTORIAL: EDUARDO DE ABREU NUNES, JORGE TRIGO MIRA, MANUEL DOS SANTOS RÉZIO, ANTÓNIO DA SILVA SALTA, LUIZ PINTO ELYSEU

Propriedade e Edição da A. E. I. S. T.

Nova edição do

REGULAMENTO DE BETÃO ARMADO

COM AS ALTERAÇÕES DO DECRETO N.º 33:021

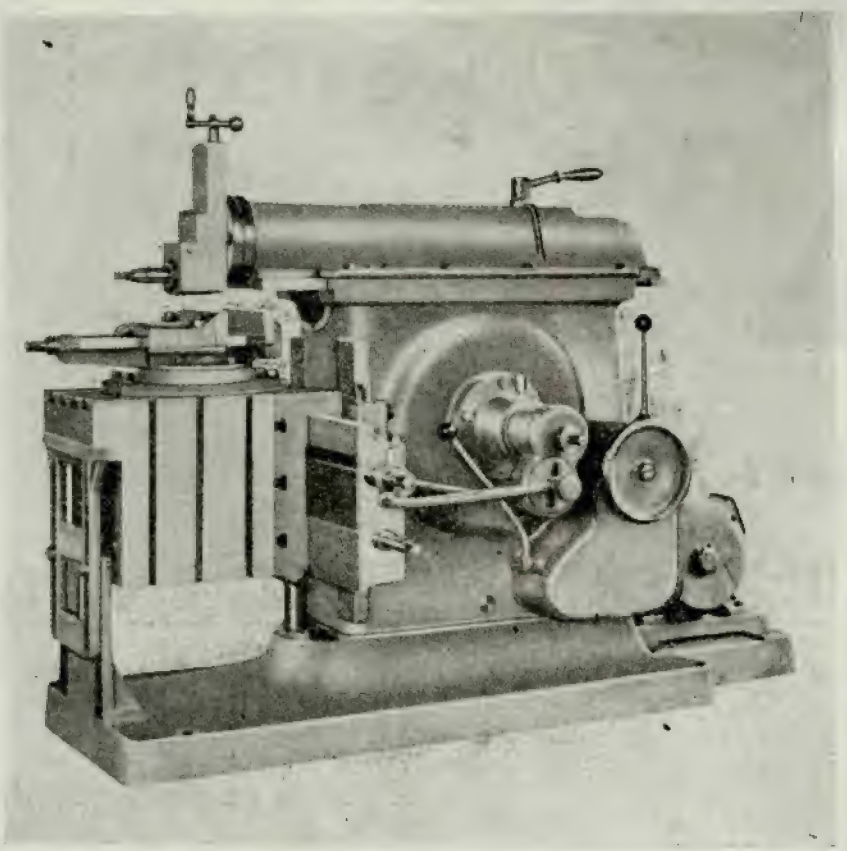
À venda na Redacção da TÉCNICA

Para impermeabilizar terraços, paredes, fundações, etc.

CONTRA A HUMIDADE

FABRICA EM SACAVÉM

TELEFONE 20879 TELEG. EPALDA—LISBOA



Tipo de limador de origem sueca idêntico ao adquirido pelo Instituto Superior Técnico para as suas oficinas, com motor trifásico da importante fábrica sueca "ASEA"

●

JAYME DA COSTA, L.DA

MECÂNICA E ELECTRICIDADE EM TÔDAS AS SUAS APLICAÇÕES

LISBOA PORTO

AMANHÃ, tal como hoje,

os aços da U. S. STEEL serão utilizados

EM TODO O MUNDO

UNITED STATES STEEL EXPORT COMPANY

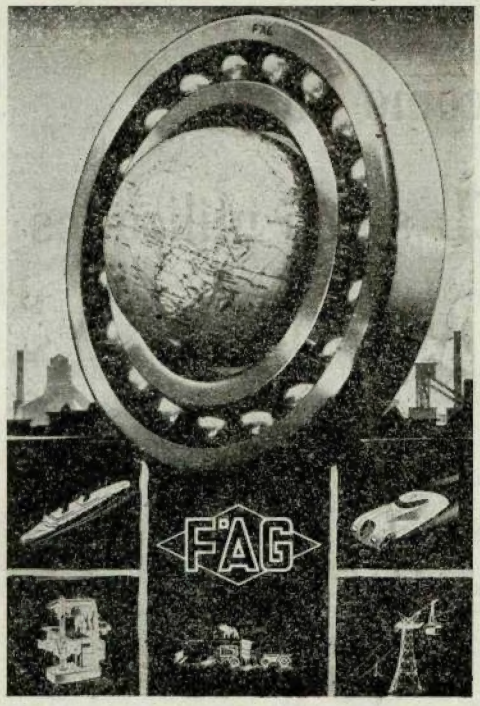
30 CHURCH STREET, NOVA YORK — E. U. A.

AO SERVIÇO DO MUNDO

DISTRIBUIDORES EM PORTUGAL

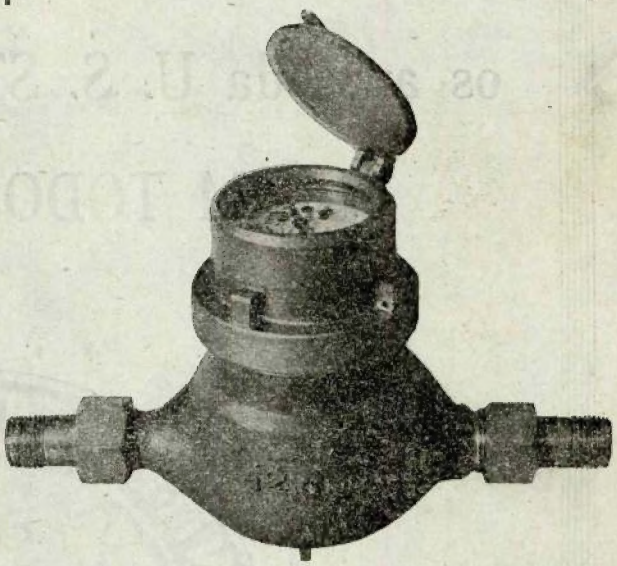
(excepto para tubos)

LISBOA **Santos Mendonça, L.da** **PÔRTO**



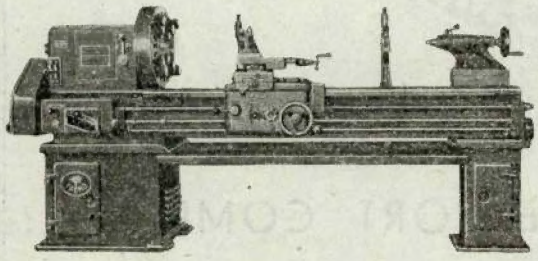
REPRESENTANTES:
SOCIEDADE DE IMPORTAÇÃO HENRIQUE THUMANN
S. A. R. L.
RUA FORMOSA, 400 — PORTO

TAGUS



INDÚSTRIA NACIONAL

TORNOS DE QUALIDADE



Fabricados segundo tolerâncias «Schlesinger», NA ORDEM DO 1/100 mm e empregando aços especiais, também de Cr-Ni, os nossos tornos são PELO MENOS TÃO BONS COMO OS MELHORES ESTRANGEIROS

Máquinas de Precisão, Ltd.ª

(Director: Eng. J. d'Arriaga de Tavares)

45, Rua da Boa Vista, 49-1.º

TELEF. 6 1581 LISBOA

MÁRMORES

aos melhores preços
Em tôdas as aplicações

IIII

A MAIOR PRODUÇÃO DO PAÍS

IIII

Pedidos à

Sociedade de Mármores de Portugal, L.da

Rua de S. Domingos de Benfica, 63

LISBOA

Emprêsa de Sondagens e Fundações

Teixeira Duarte, L.da

Sondagens geológicas

—

Consolidações do solo

—

Impermeabilização de rochas

—

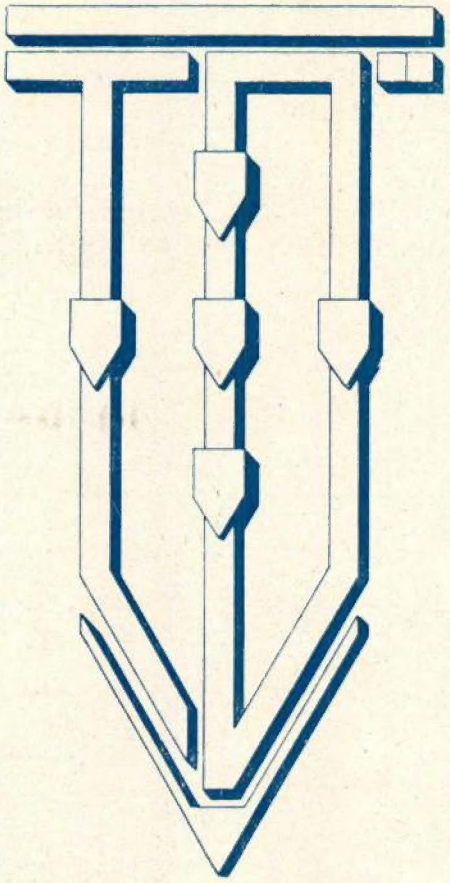
Poços artezianos

—

Rebaixamentos do nível freático

—

Captações de água subterrânea



Fundações de todos os géneros

—

Alicerces económicos

—

Estacas de todos os tipos

—

Consolidação de más fundações

—

Obras hidráulicas

—

Obras subterrâneas

Fundador e Director: **Eng. Ricardo E. Teixeira Duarte**

NOVA SEDE

LISBOA — RUA DA BETESGA, 57, 3.°

TELEFONE 2 3962

SOCIEDADE ANÓNIMA

BROWN, BOVERI & CIE.

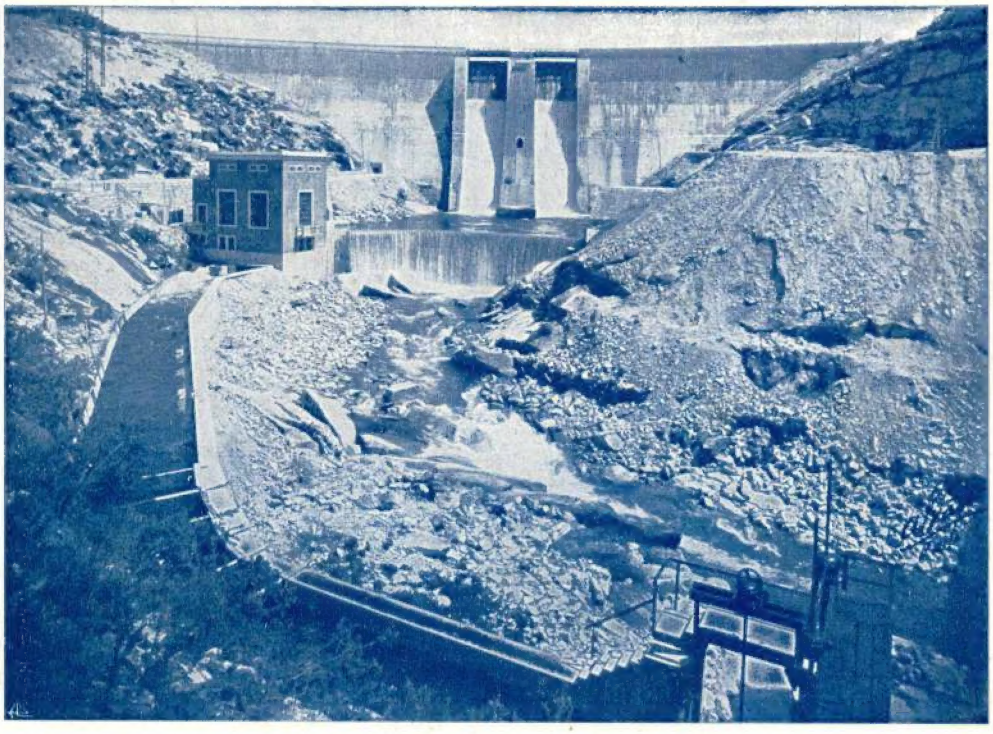
BADEN (SUISSA)

Representante geral para Portugal e Colónias:

EDOUARD DALPHIN

Escritório Técnico: Rua de Passos Manuel, 191, 2.º // PORTO // Tel. 2411

Máquinas eléctricas, transformadores, mutadores, aparelhos para alta e baixa tensão. Montagem completa de centrais termo e hidro-eléctricas. Electrificação de fábricas e de caminho de ferro. Locomotivas, e auto-motoras eléctricas e Diesel-eléctricas. Máquinas de extracção. Turbinas a vapor. Geradores de vapor Velox. Máquinas frigoríficas. Grupos e transformadores para a soldadura pelo arco. Fornos eléctricos. Comandos eléctricos especiais para tôdas as máquinas utilizadas nas Fábricas de Fiação, Tecelagem, Acabamentos, Estamparia, Cimento, Moagem, etc.



Barragem do Ermal, da Companhia Electro-Hidráulica de Portugal, com 20 milhões de metros cúbicos de capacidade da albufeira. Na parte central, duas comportas automáticas, da casa construtora «Ateliers des Charmilles», de 9 × 5 metros, para a evacuação das cheias. Em baixo, a central automática de Guilhofrei (I) com uma turbina vertical tipo Kaplan (Ateliers des Charmilles) de 2750 cavalos e o canal de condução da água à central do Ermal (central II) com uma turbina vertical tipo Francis de 6250 cavalos (Ateliers des Charmilles) e duas horizontais (Escher-Wyss) de 500 e 1500 cavalos. Tôda a parte eléctrica (alternadores, transformadores, aparelhos de 2000 e 30000 Volts) da casa BROWN, BOVERI & Cie.